MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
den 7 mars 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. Lös följande problem.

   (a) Avgör om $121206^2 + 1$ är lika med 14700007507. (2p)

   (b) Ett andragradspolynom x^2+ax+b med reella koefficienter har nollstället $x = 2 + 3i$. Bestäm talen a och b. (3p)

2. Finn alla reella lösningar till ekvationen (5p)

$$|x-3| + |(x-3)\cdot(x+4)| = x^2 - 9.$$

3. Lös ekvationen $z^4 + 2z^3 + 8z + 16 = 0$ för $z \in \mathbb{C}$. Komplexa tal får anges på antingen rektangulär eller polär form. (5p)

4. Låt $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ och $C = \{6,7,8,9\}$. Svara på följande frågor.

   (a) Bestäm $(A \setminus B) \cup C$. (1p)

   (b) På hur många sätt kan man välja a, b och c så att $a \in A$, $b \in B$ och $c \in C$? (1p)

   (c) På hur många sätt kan man tillverka en lista, (a, b, c) så att $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, men med villkoret att inga av talen i listan är lika? (3p)

5. Ina har fått en talföljd definierad rekursivt enligt följande: (5p)

$$a_1 = 1 \text{ och } a_n = 2a_{n-1} + n - 2 \text{ då } n > 1.$$

Med denna räknar hon ut att för $n = 1, 2, 3, 4, 5$ så blir $a_1, \ldots, a_5$ talen

$$1, 2, 5, 12, 27.$$

Ina gissar att det finns en sluten formel för talen, nämligen $a_n = 2^n - n$. Hon har skrivit ned ett induktionsbevis som bevisar detta nedan, men vissa delar i beviset har försvunnit. Du ska bestämma vad som fattas i luckorna; det som fattas kan vara tal, ord eller matematiska uttryck.

Var god vänd!

Inas bevis:

Vi börjar med basfallen. Det behövs ett basfall, nämligen då $n = \underline{\quad (a) \quad}$. Det är lätt att verifiera att den slutna formeln stämmer överens med definitionen i detta fall.

Induktionsantagande: Antag att $n \geq \underline{(b)}$ och att $\underline{\quad (c) \quad}$. Vi ska nu visa att $a_n = \underline{\quad (d) \quad}$. Från $\underline{\quad\quad (e) \quad\quad}$ är det givet att

$$a_n = 2a_{n-1} + n - 2.$$

Högerledet kan nu skrivas om enligt $\underline{\quad\quad (f) \quad\quad}$, så vi får att

$$a_n = 2\left(\underline{\quad\quad\quad (g) \quad\quad\quad}\right) + n - 2.$$

Efter förenkling av högerledet, får vi att $a_n = \underline{\quad (h) \quad}$, vilket är vad vi ville visa. Basfallen tillsammas med resonemanget ovan visar att den slutna formeln gäller för alla $n \geq \underline{(i)}$.

Max 5 poäng, och för varje lucka som ej är korrekt bestämd dras 1 poäng. Endast svar för luckorna krävs.

6. (a) Definiera begreppet *största gemensamma delare.* (1p)

   (b) Visa att om $\text{SGD}(a, b) = 1$ så kan $\text{SGD}(6a, b)$ bara anta värdena $1, 2, 3$ eller 6. (4p)

Satser från kursen får användas.

Ledtråd: Börja med att förstå varför $\text{SGD}(6a, b)$ inte kan vara 5.