Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. Följande ska lösas för $x \in \mathbb{R}$. (6p)

   (a) Lös olikheten $(x-1)^2(x-4)(x-6) \geq 0$.

   (b) Lös olikheten $|x-2| \cdot |x-5| \geq 10$.

   (c) Gäller implikationen $|x-2| \cdot |x-5| \geq 10 \implies (x-1)^2(x-4)(x-6) \geq 0$?

   Lösning. (a) Teckentabell ger

x	$(-\infty, 1)$	$(1,4)$	$(4,6)$	$(6,\infty)$
Tecken	$+$	$+$	$-$	$+$

   Olikheten gäller då $x \leq 4$ och då $x \geq 6$.

   (b) För den andra olikheten så fås tre intervall baserat på brytpunkterna $x = 2$ och $x = 5$.

   Fall 1: $x \leq 2$. Då är både $x - 2 \leq 0$ och $x - 5 \leq 0$, så

$$|x-2||x-5| = (2-x)(5-x).$$

   Detta leder till olikheten $(2-x)(5-x) \geq 10$, och

$$(2-x)(5-x) \geq 10 \implies x^2 - 7x \geq 0 \implies x(x-7) \geq 0.$$

   Olikheten löses då av $x \leq 0$ eller $x \geq 7$. Men eftersom vi i Fall 1 är i intervallet $x \leq 2$ får vi bara lösningarna $x \leq 0$.

   Fall 2: $2 \leq x \leq 5$. Vänsterledet är $-(x-2)(x-5)$ och olikheten blir

$$-(x-2)(x-5) \geq 10 \implies x^2 - 7x + 20 \leq 0 \implies (x - \tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{49}{4} + 20 \leq 0.$$

   Men här saknas lösning, eftersom vänsterledet alltid är positivt.

   Fall 3: $x \geq 5$. Olikheten blir samma som i Fall 1, men nu får vi lösningarna $x \geq 7$.
   Sammanfattningsvis löses olikheten av de x som uppfyller

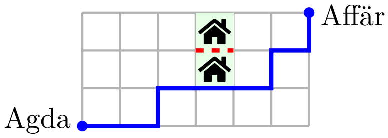
$$x \leq 0 \text{ eller } x \geq 7.$$

(c) Vi undersöker om

$$|x-2||x-5| \geq 10 \qquad \Longrightarrow \qquad (x-1)^2(x-4)(x-6) \geq 0.$$

Från (b): Mängden där vänstra sidan är sann är $(-\infty, 0] \cup [7, \infty)$. Från (a): Mängden där högra sidan är sann är $(-\infty, 4] \cup [6, \infty)$. Vi ser då att om x ligger i den första mängden, så ingår den i den andra mängden också. Alltså gäller implikationen.

2. Agda bor i ett kvarter i ett rutnät med gator. Hon vill promenera från sitt hem till affären, genom att gå tre sträckor norrut och sex sträckor österut. Hon måste alltså gå 9 sträckor totalt. I figuren är en sådan promenad markerad. (6p)



(a) Hur många olika promenader totalt kan Agda gå, med tre sträckor norr och sex sträckor öster?

(b) Ester och Gerd är grannar med en gemensam gata. Agda vill inte promenera på just denna sträcka mellan husen eftersom då Esters pudel har för vana att skälla så förfärligt om hon går där. På hur många sätt kan Agda ta sig till affären utan att gå mellan de två husen i figuren?

Lösning. (a) Agda ska gå 9 sträckor, och tre av dessa ska vara i nordlig riktning. Detta ger totalt $\binom{9}{3} = 84$ olika promenader.

(b) Först räknar vi ut antalet promenader som passerar Ester och Gerds hus. En sådan promenad består av tre delar:

- 5 sträckor (2 norr, 3 öster),
- ett sträckor österut, mellan husen,
- 3 sträckor (1 norr, 2 öster).

Första delen kan väljas på $\binom{5}{2} = 10$ sätt och den andra delen har $\binom{3}{1} = 3$ sätt. Totalt finns då 30 promenader som passerar den arga pudeln. Vi kan då konstatera att Agda har $84 - 30 = 54$ pudelfria promenader att välja bland.

3. Finn en heltalslösning och en icke-reell lösning till ekvationen (6p)

$$x^7 + x^6 + 4x^4 + 4x^3 + 8x + 8 = 0.$$

Lösning. Sats från kursen säger att heltalslösningar kan bara vara delare till 8. Vi ser att ekvationen inte har några positiva rötter. Vi testar $x = -1$ och ser att det är en rot. Polynomdivision ger att vi kan faktorisera vänsterledet som

$$(x+1)(x^6+4x^3+8).$$

Vi sätter $t = x^3$ och får att den andra faktorn blir t^2+4t+8. Denna är noll om $t = -2 \pm 2i$. Alltså vill vi nu hitta en lösning till $x^3 = -2+2i$. Nu, omskrivning på polär form ger

$$-2+2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

En lösning till $x^3 = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ges då av

$$x = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = 1+i.$$

Så, -1 och $1+i$ är lösningar vi söker.

4. Formulera binomialsatsen och beräkna därefter koefficienten för z^2 i uttrycket $\left(z^2 + \frac{1}{z}(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)\right)^{10}$. Ange svaret på rektangulär form. (6p)

Lösning. Binomialsatsen säger att

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Om vi sätter $\alpha = \cos 10^\circ + i\sin 10^\circ$ så ger binomialsatsen att

$$\left(z^2 + \frac{\alpha}{z}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (z^2)^k \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} z^{3k-10}\alpha^{10-k}.$$

Koefficienten för z^2 får man då $k = 4$ då det gör att $z^{3k-10} = z^2$. Via De Moivres formel får vi därefter

$$\binom{10}{4}\alpha^6 = \frac{10!}{4!6!}\left(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ\right)^6 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right).$$

Detta förenklas nu till $210(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 105 + 105\sqrt{3}i$.

5. (a) Vilket krav ska uppfyllas om den Diofantiska ekvationen $ax+by = 1$ ska ha lösningar? (Talen a och b är heltal.) (6p)

   (b) Visa att om $ax+by = 1$ har heltalslösningar, så har även den Diofantiska ekvationen $(2a+b)x + (3a+2b)y = 1$ heltalslösningar.

Lösning. (a) Denna Diofantiska ekvation har lösningar precis då a och b är relativt prima, dvs. $\mathrm{SGD}(a, b) = 1$.

(b) Använder vi (a), så vill vi visa implikationen

$$\mathrm{SGD}(a, b) = 1 \implies \mathrm{SGD}(2a + b, 3a + 2b) = 1.$$

Vi använder Euklides algoritm för att beräkna $\mathrm{SGD}(2a + b, 3a + 2b)$:

$$\begin{aligned}
3a + 2b &= 1 \cdot (2a + b) + (a + b) \\
(2a + b) &= 1 \cdot (a + b) + a \\
(a + b) &= 1 \cdot (a) + b \\
a &= k \cdot b + r,
\end{aligned}$$

och från sista steget kan vi konstatera att $\mathrm{SGD}(2a + b, 3a + 2b) = \mathrm{SGD}(a, b) = 1$, eftersom i stegen ovan så fortsätter vi som om vi beräknar $\mathrm{SGD}(a, b)$.

Alternativ lösning I: Antag att d är en gemensam delare till $(3a+2b)$ och $(2a + b)$, dvs. $d \mid 2a + b$ och $d \mid 3a + 2b$. Då gäller det att d delar skillnaden, $d \mid (3a+2b) - (2a+b)$, så $d \mid a+b$. Då måste vi även ha $d \mid (2a+b) - (a+b)$ så $d \mid a$. Från $d \mid 2a + b$ och $d \mid a$ får vi att $d \mid b$. Alltså måste d vara en gemensam delare till a och b. Men vi utgår från att a och b är relativt prima, så $d = 1$.

Alternativ lösning II: Vi utgår från att (x_0, y_0) är en heltalslösning till $ax + by = 1$. Då kan man (med lite tålamod och linjär algebra) se att

$$(2a + b)(2x_0 - 3y_0) + (3a + 2b)(2y_0 - x_0) = ax_0 + by_0 = 1,$$

så $x^* = 2x_0 - 3y_0$ och $y^* = 2y_0 - x_0$ löser ekvationen $(2a+b)x + (3a+2b)y = 1$.