Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
2025-10-22

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. (a) Utgå ifrån att $a, b \in \mathbb{Z}$. Är påståendet *"Om ab är delbart med* 8*, så är a eller b delbart med 8"* sant? Bevisa eller ge ett motexempel. (6p)

   (b) Bestäm **en** reell lösning till ekvationen $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 17x + 14 = 0$.

   (c) Ge exempel på ett tal som tillhör mängden

$$\{z \in \mathbb{N} \quad : \quad z > 42 \ \wedge \ \exists x, y \in \mathbb{Z} : z = x^3 + y^3\}.$$

   Lösning. (a) Falskt. Motexempel: $a = 2$, $b = 4$. Då är $ab = 8$ delbart med 8, men varken 2 eller 4 är delbart med 8.

   (b) Prova heltalsrötter (delare till 14). För $x = -2$: $(-2)^4+2(-2)^3+5(-2)^2+17(-2) + 14 = 16 - 16 + 20 - 34 + 14 = 0$. Alltså är $x = -2$ en reell lösning.

   (c) Exempel: $z = 3^3 + 3^3 = 27 + 27 = 54 > 42$.

2. Betrakta den Diofantiska ekvationen $35x + 21y = 2100$. (6p)

   (a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen.

   (b) Bestäm antalet lösningar (x, y) där $x, y \geq 0$.

   (c) Bestäm summan av alla heltal x som ingår i en lösning (x, y) där $x, y \geq 0$.

   Lösning. Vi delar först båda led med $\mathrm{SGD}(35, 21) = 7$ och får ekvationen $7x + 5y = 300$. Nu har vi att $\mathrm{SGD}(5, 3) = 1$, så ekvationen har lösningar.

   (a) Vi löser först $5x + 3y = 1$. Man kan direkt se att $x = -1$, $y = 2$ ger en lösning, så $x = -300$, $y = 2 \cdot 300 = 600$ är en lösning till ursprungliga ekvationen. Allmän lösning är då

$$\begin{cases} x = & 3k - 300 \\ y = & 600 - 5k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

   (b) Positivitetsvillkor: $x \geq 0$ och $y \geq 0$ ger $100 \leq k \leq 120$, så vi har 21 lösningar där $x, y \geq 0$.

   (c) Den lösning med minsta x är $(0, 100)$ och den med störst x är $(60, 0)$ Formeln för aritmetisk summa ger då att summan av alla de 21 värden som ingår är $\frac{0+60}{2} \cdot 21 = 630$.

3. Lös ekvationen $z^2 - 6z + (36 + 36i) = 0$ för $z \in \mathbb{C}$. (6p)

Lycka till!

Lösning. Kvadratkomplettering ger oss

$$(z-3)^2 - 9 + 36 + 36i = 0 \iff w^2 = 9(-3-4i),$$

där $w = z - 3$. Om vi sätter $w = a + ib$ och jämför realdel, imaginärdel samt absolutbelopp, får vi

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = 9 \cdot (-3) \\ 2ab & = 9 \cdot (-4) \\ a^2 + b^2 & = \sqrt{9^2\left((-3)^2 + (-4)^2\right)} = 9 \cdot 5. \end{cases}$$

Första och sista ekvationen ger $2a^2 = 18$, så $a = \pm 3$ och detta ger $b = \mp 6$. Alltså, $w_1 = 3 - 6i$, $w_2 = -3 + 6i$. Detta leder slutligen till lösningarna

$$z_1 = 6 - 6i, \; z_2 = 6i.$$

4. Agda, Berit och Gerd går på en gemensam promenad med sina hundar längs en gata med 144 lyktstolpar. Agda har en tax, Berit har en schäfer och Gerd har en ny pudel. Taxen kissar på var 6e stolpe, schäfern kissar på var 8e stolpe och pudeln nöjer sig med att kissa på var 9e stolpe. Du ska utgå ifrån att alla tre hundar kissar på den sista stolpen. (6p)

   (a) På hur många lyktstolpar kissar både taxen och schäfern?

   (b) Hur många lyktstolpar kissas på av alla tre hundar?

   (c) Hur många lyktstolpar förblir torra efter promenaden?

   Lösning. Låt

$$\begin{aligned} S_6 &= \{6, 12, 18, \ldots, 144\} \\ S_8 &= \{8, 16, 24, \ldots, 144\} \\ S_9 &= \{9, 18, 27, \ldots, 144\}. \end{aligned}$$

   (a) Schäfern och taxen besöker $S_6 \cap S_8$, vilket är var 24e stolpe. $144/24 = 6$, så 6 stolpar totalt.

   (b) Här söker vi $S_6 \cap S_8 \cap S_9$. Minsta gemensamma multipel av 6, 8 och 9 är 72, så bara stolpe nummer 72 och 144 får besök av alla tre hundar.

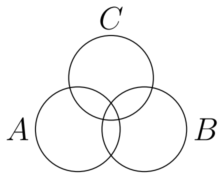
   (c) Vi har att

$$\begin{aligned} |S_6| &= 144/6 = 24 & \qquad |S_6 \cap S_8| &= 6 \\ |S_8| &= 144/8 = 18 & \qquad |S_6 \cap S_9| &= 8 \\ |S_9| &= 144/9 = 16 & \qquad |S_8 \cap S_9| &= 2. \end{aligned}$$

   Inklusion-exklusion ger nu att de stolpar som inte besöks är totalt

$$144 - (24 + 18 + 16) + (6 + 8 + 2) - 2 = 100.$$

5. (a) Rita av Venn-diagramet (6p)



och illustrera mängden $(A^c \cup B \cup C)^c \ \cup \ C$. Kom ihåg att X^c betyder *komplementet till* X.

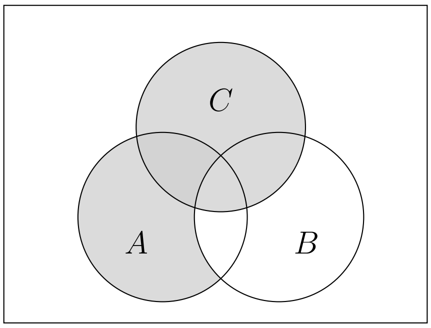
(b) Visa att följande logiska uttryck är ekvivalenta:

$$\neg(\neg P \vee Q \vee R) \vee R$$

och

$$\neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \quad \wedge \quad \neg(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \quad \wedge \quad \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R).$$

Lösning. (a) Venn-diagrammet ser ut som följande:



(b) Sätter man upp en sammingstabell, får man följande. Det är lämpligt att ha med deluttryck också. Alternativt kan man utnyttja (a) och notera att $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ samt $C \leftrightarrow R$ översätter från Venndiagramet till första uttrycket i (b).

P	Q	R	$\neg(\neg P \vee Q \vee R) \vee R$	Det andra uttrycket
F	F	F	F	F
F	F	T	T	T
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
T	T	T	T	T

Det andra uttrycket i (b) kan tolkas som "måste vara utanför" för tre av områdena i Venn-diagrammet, nämligen utanför $A \cap B \cap C^c$, utanför $A^c \cap B \cap C^c$ och utanför $A^c \cap B^c \cap C^c$. Det vill säga, det andra uttrycket är precis "vi är utanför de oskuggade områdena" som är ekvivalent med "är inuti det skuggade".