MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
2025-11-26

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. (a) Ge exempel på ett fjärdegradspolynom med heltalskoefficienter, som saknar reella rötter. (6p)

   (b) Bevisa att $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, om $z, w \in \mathbb{C}$.

2. Lös följande olikhet för $x \in \mathbb{R}$: (6p)

$$|\sqrt{x-2} - 10| + |4 - x| \geq 10.$$

3. (a) Visa att $16^k = 16 \pmod{24}$ för alla heltal $k \geq 1$. (6p)

   (b) Förenkla det komplexa talet

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{16^{2025}}$$

   och svara på rektangulär form.

4. Gerd har ett fönster med 9 krukor på rad: två amaryllisar, tre blomsterkrasse, tre clematis och en dillkruka. (6p)

   (a) På hur många sätt kan krukorna stå på rad i fönstret?

   (b) Amaryllis och clematis är giftiga och Gerds nyfikna pudel kan stå på soffan och komma åt de två krukor längst till vänster på fönsterbrädet. På hur många sätt kan Gerd arrangera sina blommor på rad, så att de två vänstra krukorna bara är blomsterkrasse eller dill?

   Blommor av samma sort är identiska. Svaren ska anges som heltal eller produkter av heltal.

5. (a) Beräkna summan $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!)$ för $n = 1, 2, 3, 4$. (2p)

   (b) Visa med induktion att (4p)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1 \text{ om } n \geq 1.$$

   Var noga med att formulera basfall och induktionsantagande.

Lycka till!