MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Diskret matematik, Matematik I, 4 hp
2025-11-26

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E.

1. (a) Ge exempel på ett fjärdegradspolynom med heltalskoefficienter, som saknar reella rötter. (6p)

   (b) Bevisa att $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, om $z, w \in \mathbb{C}$.

   Lösning. (a) Exempelvis $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, som har $\{i, i, -i, -i\}$.

   (b) Se kursboken.

2. Lös följande olikhet för $x \in \mathbb{R}$: (6p)

$$|\sqrt{x-2} - 10| + |4 - x| \geq 10.$$

   Lösning. Notera först att $x \geq 2$, annars är vänsterledet inte definierat. Uttrycken inuti absolutbeloppen byter tecken vid $x = 102$ och $x = 4$. Dessa brytpunkter ger oss tre fall.

   Fall I: $2 \leq x < 4$**:** Vi får

$$(10 - \sqrt{x-2}) + (4 - x) \geq 10 \iff 4 - x \geq \sqrt{x-2}.$$

   Båda sidor är positiva på intervallet, så denna olikhet är ekvivalent med

$$16 - 8x + x^2 \geq x - 2 \iff x^2 - 9x + 18 \geq 0.$$

   Denna olikhet gäller om $x \leq 3$ eller $x \geq 6$, så i Fall I får vi $\boxed{2 \leq x \leq 3}$ som lösningar.

   Fall II: $4 \leq x < 102$**:** Vi får

$$(10 - \sqrt{x-2}) + x - 4 \geq 10 \iff x - 4 \geq \sqrt{x-2}.$$

   Kvadrerar vi nu, får vi precis samma olikhet som i Fall I, så $\boxed{6 \leq x < 102}$ är de lösningar som fås i Fall II.

   Fall III: $102 \leq x$**:** Vi får

$$(\sqrt{x-2} - 10) + x - 4 \geq 10 \iff x - 24 \geq -\sqrt{x-2}.$$

   Vänsterledet är alltid positivt om $x \geq 102$, och högerledet är alltid negativt. Alltså ger Fall III $\boxed{102 \leq x}$ som lösningsmängd.

   Sammanfattningsvis, olikheten löses av $2 \leq x \leq 3$ eller $x \geq 6$.

3. (a) Visa att $16^k = 16 \pmod{24}$ för alla heltal $k \geq 1$. (6p)

   (b) Förenkla det komplexa talet

$$\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{16^{2025}}$$

   och svara på rektangulär form.

Lycka till!

Lösning. (a) Vi har att $16^2 \equiv_{24} 256 \equiv_{24} 16$. För $k \geq 1$ har vi därefter att

$$16^{k+1} \equiv_{24} 16^2 \cdot 16^{k-1} \equiv_{24} 16 \cdot 16^{k-1} \equiv_{24} 16^k.$$

Detta ger nu att $16, 16^2, 16^3, \ldots,$ alla ger resten 16, vid division med 24. Alternativt, undersöker vi $16^k - 16$, så är detta delbart med både 3 och 8, oavsett k. Detta ger delbarhet med 24.

(b) Enligt (a) gäller $16^{2025} \equiv_{24} 16$, så $16^{2025} = 24N + 16$ för något heltal N. Det komplexa talet vi är intresserade av skrivs om som

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{24}}\right)^{24N+16} = \underbrace{\left(e^{2\pi i}\right)^N}_{=1} \cdot \left(e^{\frac{32\pi i}{24}}\right) = e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Omskrivning på rektangulär form ger nu

$$e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Gerd har ett fönster med 9 krukor på rad: två amaryllisar, tre blomsterkrasse, tre clematis och en dillkruka. (6p)

(a) På hur många sätt kan krukorna stå på rad i fönstret?

(b) Amaryllis och clematis är giftiga och Gerds nyfikna pudel kan stå på soffan och komma åt de två krukor längst till vänster på fönsterbrädet. På hur många sätt kan Gerd arrangera sina blommor på rad, så att de två vänstra krukorna bara är blomsterkrasse eller dill?

Blommor av samma sort är identiska. Svaren ska anges som heltal eller produkter av heltal.

Lösning. (a) Detta är samma som antalet permutationer av ordet `aabbbcccd`, så vi får

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2^3 \cdot 3^2} = 7!.$$

(b) De två vänstra krukorna kan vara `bb`, `db` eller `bd`. I första fallet, har vi 7 krukor kvar, `aabcccd`, vilket ger $\frac{7!}{2!3!} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 420$.

Om de två vänstra är `db` eller `bd`, så kan övriga krukor placeras på $\frac{7!}{2!2!3!} = 210$. Totalt blir det då $420 + 2 \cdot 210 = 840$ sätt.

5. (a) Beräkna summan $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!)$ för $n = 1, 2, 3, 4$. (2p)

(b) Visa med induktion att (4p)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1 \text{ om } n \geq 1.$$

Var noga med att formulera basfall och induktionsantagande.

Lösning. (a) För $n = 1, 2, 3, 4$, är summan 1, 5, 23 samt 119.

(b) Vi ska bevisa den slutna formeln med induktion. Basfall $n = 1$: $1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$, så identiteten gäller för $n = 1$.

Induktionssteg: antag att $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$ för något $n \geq 1$. Då har vi att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (k!) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (k!) \right) + (n+1)(n+1)!.$$

Summan i högerledet är lika med $(n+1)! - 1$ enligt induktionsantagande, så högerledet blir (med algebraiska omskrivningar):

$$\begin{aligned} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! &= (n+1+1)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

Vi har alltså visat att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot (k!) = (n+2)! - 1,$$

vilket är precis påståendet för nästföljande n. Detta, tillsammans med basfallet och induktionsprincipen, gör att formeln gäller för alla $n \geq 1$.