

Lösningförslag till tentamen i Diskret matematik

Matematik I, 4 hp

2026-03-12

Uppgift 1

(a) Ange två heltal n sådana att $n \equiv 3 \pmod{7}$ och $10 < n < 30$.

Lösning: Vi söker heltal på formen $n = 7k + 3$ för något heltal k , som ligger i intervallet $10 < n < 30$. Vi testar olika värden på k :

- Om $k = 1$ får vi $n = 7(1) + 3 = 10$. (Ej strikt större än 10).
- Om $k = 2$ får vi $n = 7(2) + 3 = 17$. ($10 < 17 < 30$, OK).
- Om $k = 3$ får vi $n = 7(3) + 3 = 24$. ($10 < 24 < 30$, OK).
- Om $k = 4$ får vi $n = 7(4) + 3 = 31$. (För stort).

Svar: $n = 17$ och $n = 24$.

(b) Bestäm resten då 3^{42} delas med 10.

Lösning: Vi söker $3^{42} \pmod{10}$. Vi kan använda Eulers sats eller titta på mönstret för sista siffran i potenser av 3: $3^1 \equiv 3$ $3^2 \equiv 9$ $3^3 \equiv 27 \equiv 7$ $3^4 \equiv 81 \equiv 1$ Mönstret upprepar sig vart 4:e steg (perioden är 4). Vi tittar på exponenten 42 modulo 4: $42 = 4 \cdot 10 + 2 \implies 42 \equiv 2 \pmod{4}$. Därmed gäller:

$$3^{42} \equiv 3^2 \pmod{10} \equiv 9 \pmod{10}$$

Svar: Resten är 9.

(c) Formulera faktorsatsen för polynom.

Lösning: Låt $P(x)$ vara ett polynom. Då är $x - a$ en faktor i $P(x)$ om och endast om $P(a) = 0$. Det vill säga, a är ett nollställe till polynomet om och endast om polynomet är delbart med $(x - a)$.

Uppgift 2

(a) Bestäm $\text{SGD}(132, 180)$ med Euklides algoritmen.

Lösning: Vi utför Euklides algoritmen:

$$180 = 1 \cdot 132 + 48$$

$$132 = 2 \cdot 48 + 36$$

$$48 = 1 \cdot 36 + 12$$

$$36 = 3 \cdot 12 + 0$$

Den sista icke-försvinnande resten är 12.

Svar: $\text{SGD}(132, 180) = 12$.

(b) Hitta alla icke-negativa heltalslösningar till $11x + 15y = 135$.

Lösning: Vi skriver om ekvationen för att undersöka delbarhet: $11x = 135 - 15y \implies 11x = 15(9 - y)$. Eftersom 15 delar högerledet och $\text{SGD}(11, 15) = 1$, måste 15 dela x . Låt $x = 15k$ där k är ett heltal. Insättning ger: $11(15k) = 15(9 - y) \implies 11k = 9 - y \implies y = 9 - 11k$.

Kravet på icke-negativa lösningar ($x \geq 0, y \geq 0$) ger: 1) $x \geq 0 \implies 15k \geq 0 \implies k \geq 0$. 2) $y \geq 0 \implies 9 - 11k \geq 0 \implies 11k \leq 9 \implies k \leq \frac{9}{11}$.

Eftersom k är ett heltal och $0 \leq k < 1$ måste $k = 0$. Detta ger: $x = 15(0) = 0$ $y = 9 - 11(0) = 9$

Svar: $(x, y) = (0, 9)$.

(c) Bestäm det minsta positiva heltal b för vilket ekvationen $132x + 180y = b$ har heltalslösningar, samt finn en lösning.

Lösning: En linjär diofantisk ekvation $Ax + By = C$ har lösningar om och endast om $\text{SGD}(A, B)$ delar C . Det minsta positiva heltalet b är således $\text{SGD}(132, 180)$. Från uppgift (a) vet vi att $\text{SGD}(132, 180) = 12$. Alltså är $b = 12$.

Vi söker nu en lösning till $132x + 180y = 12$. Vi använder Euklides algoritmen baklänges (från a):
 $12 = 48 - 3 \cdot 36$
 $36 = 132 - 2 \cdot 48$
Insättning ger: $12 = 48 - (132 - 2 \cdot 48) = 3 \cdot 48 - 132$
 $48 = 180 - 132$
Insättning ger: $12 = 3(180 - 132) - 132 = 3 \cdot 180 - 3 \cdot 132 - 1 \cdot 132 = 3 \cdot 180 - 4 \cdot 132$. Vi kan skriva detta som: $132(-4) + 180(3) = 12$.

Svar: $b = 12$. En lösning är $x = -4, y = 3$.

Uppgift 3

Finn alla reella lösningar till olikheten:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{1}{x}$$

Lösning: Vi flyttar över termerna till vänsterledet:

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq 0$$

Skriv på gemensamt bråkstreck (nämnaren blir $x(x-2)$):

$$\frac{x(x+1) - 1(x-2)}{x(x-2)} \leq 0$$

Förenkla täljaren:

$$\frac{x^2 + x - x + 2}{x(x-2)} \leq 0 \implies \frac{x^2 + 2}{x(x-2)} \leq 0$$

Vi analyserar tecknet för täljare och nämnare:

- Täljaren $x^2 + 2$ är alltid positiv för alla reella x ($x^2 \geq 0 \implies x^2 + 2 \geq 2$).
- För att kvoten ska vara ≤ 0 måste därför nämnaren vara negativ: $x(x-2) < 0$.

Observera att nämnaren inte får vara 0, så $x \neq 0$ och $x \neq 2$. Olikheten $x(x-2) < 0$ gäller då x ligger mellan rötterna 0 och 2.

Teckentabell:

x	0	2		
x	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0
$x(x-2)$	+	0	-	0

Vi ser att uttrycket är negativt i intervallet $(0, 2)$.

Svar: $0 < x < 2$.

Uppgift 4

(a) Bestäm alla komplexa rötter till $z^2 + (2-2i)z - (1+2i) = 0$.

Lösning: Vi använder pq-formeln med $p = 2-2i$ och $q = -(1+2i)$.

$$z = -\frac{2-2i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2-2i}{2}\right)^2 - (-(1+2i))}$$

$$z = -(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 + 1 + 2i}$$

Utveckla kvadraten under rottecknet: $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$.

$$z = -1 + i \pm \sqrt{-2i + 1 + 2i}$$

$$z = -1 + i \pm \sqrt{1}$$

Fall 1: $z_1 = -1 + i + 1 = i$. Fall 2: $z_2 = -1 + i - 1 = -2 + i$.

Svar: $z_1 = i$, $z_2 = -2 + i$.

(b) Skriv det komplexa talet $w = (1 + i)^{10}$ på formen $a + bi$.

Lösning: Vi skriver om $1 + i$ på polär form. Beloppet: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Argumentet: $\tan \phi = 1/1 = 1$, första kvadranten $\implies \phi = \pi/4$. Så $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. De Moivres formel ger:

$$w = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{i \cdot 10\pi/4} = 2^5e^{i \cdot 5\pi/2}$$

$$w = 32e^{i(2\pi + \pi/2)} = 32e^{i\pi/2}$$

Eftersom $e^{i\pi/2} = i$, får vi: $w = 32i$.

Svar: $0 + 32i$.

(c) Med hjälp av de Moivres formel, skriv $\sin 3\theta$ som funktion av $\sin \theta$ och $\cos \theta$.

Lösning: Enligt de Moivres formel gäller $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. Vi utvecklar vänsterledet med binomialsatsen:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta (i \sin \theta) + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3$$

$$= \cos^3 \theta + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta) - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

Samla real- och imaginärdelar:

$$= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

Jämför imaginärdelarna med $\cos 3\theta + i \sin 3\theta$:

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

Svar: $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$.

Uppgift 5

Sju vänner (A, B, C, D, E, F, G) ska ställa sig i en kö.

(a) På hur många sätt kan de bilda en kö om A och B absolut inte vill stå bredvid varandra?

Lösning: Totalt antal sätt att ställa 7 personer i kö är $7!$. Vi använder komplementmetoden: Beräkna antalet fall där A och B *står* bredvid varandra och dra bort detta från totalen. Betrakta paret (AB) som en enhet. Då har vi 6 enheter att permutera: $\{(AB), C, D, E, F, G\}$. Detta kan göras på $6!$ sätt. Inom enheten kan A och B byta plats på $2!$ sätt (AB eller BA). Antal förbjudna köer = $2 \cdot 6!$.

Antal tillåtna köer = Totalt - Förbjudna

$$= 7! - 2 \cdot 6! = 5040 - 2(720) = 5040 - 1440 = 3600$$

Svar: 3600 sätt.

(b) På hur många sätt kan de bilda en kö om A måste stå någonstans före B och B måste stå någonstans före C?

Lösning: Vi ska placera ut 7 personer. Vi kan först välja ut vilka 3 positioner i kön som ska ockuperas av personerna A, B och C. Antalet sätt att välja 3 positioner av 7 är $\binom{7}{3}$. På dessa 3 valda positioner finns det bara **ett** sätt att placera A, B och C så att villkoret uppfylls (A först, sen B, sen C). De övriga 4 personerna (D, E, F, G) kan placeras på de resterande 4 positionerna på $4!$ sätt.

Totala antalet sätt:

$$\binom{7}{3} \cdot 1 \cdot 4! = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 24 = 35 \cdot 24 = 840$$

Alternativt resonemang: Av alla $7!$ permutationer, betrakta trion A, B, C. De kan inbördes ordnas på $3! = 6$ olika sätt. På grund av symmetri kommer varje inbördes ordning förekomma lika många gånger totalt sett. Endast en av dessa 6 ordningar är korrekt (A-B-C). Därmed är svaret $7!/6 = 5040/6 = 840$.

Svar: 840 sätt.