

Lösningsförslag

1. Blandade frågor.

- (a) Finn $\text{SGD}(240, 154)$ med Euklides algoritmen. (2p)

Lösning. Euklides algoritmen ger

$$240 = 1 \cdot 154 + 86,$$

$$154 = 1 \cdot 86 + 68,$$

$$86 = 1 \cdot 68 + 18,$$

$$68 = 3 \cdot 18 + 14,$$

$$18 = 1 \cdot 14 + 4,$$

$$14 = 3 \cdot 4 + 2,$$

$$4 = 2 \cdot 2.$$

Den sista icke-nollresten är 2. Alltså

$$\boxed{\text{SGD}(240, 154) = 2}.$$

- (b) Beräkna resten då 5^{40} delas med 11. (2p)

Lösning. Vi räknar modulo 11. Eftersom

$$5^5 = 3125 \equiv 1 \pmod{11},$$

får vi

$$5^{40} = (5^5)^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Resten är alltså

$$\boxed{1}.$$

- (c) Ge exempel på en mängd A sådan att $|A \times A| = 9$, där mängden $A \times A$ består av alla ordnade par av element ur mängden A . (1p)

Lösning. För en ändlig mängd gäller

$$|A \times A| = |A|^2.$$

Vi behöver därför $|A| = 3$. Ett exempel är

$$\boxed{A = \{1, 2, 3\}}.$$

Då har $A \times A$ precis $3 \cdot 3 = 9$ element.

2. Logik och mängdlära.

- (a) Avgör om följande påstående är sant eller falskt för $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \exists y (x^2 + y = 10).$$

Motivera noga.

(2p)

Lösning. Påståendet är **sant**. Låt $x \in \mathbb{R}$ vara godtyckligt. Välj

$$y = 10 - x^2.$$

Då är $y \in \mathbb{R}$ och

$$x^2 + y = x^2 + (10 - x^2) = 10.$$

Det finns alltså ett sådant y för varje reellt x .

- (b) Låt A, B och C vara mängder. Visa att

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

genom att använda mängdlärans definitioner.

(3p)

Lösning. Vi visar att ett godtyckligt element x tillhör vänsterledet om och endast om det tillhör högerledet:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\iff x \in A \setminus B \text{ och } x \notin C \\ &\iff x \in A, x \notin B \text{ och } x \notin C \\ &\iff x \in A \text{ och } x \notin (B \cup C) \\ &\iff x \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

Eftersom detta gäller för varje x följer

$$\boxed{(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)}.$$

3. Polynom.

- (a) Visa att $x - 1$ är en faktor i

$$p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

och finn samtliga reella nollställen.

(3p)

Lösning. Först beräknar vi

$$p(1) = 1 - 3 + 1 + 3 - 2 = 0.$$

Enligt faktorsatsen är därför $x - 1$ en faktor. Polynomdivision ger

$$p(x) = (x - 1)(x^3 - 2x^2 - x + 2).$$

Kubiken faktoriseras genom gruppering:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x - 2) - (x - 2) \\&= (x^2 - 1)(x - 2) \\&= (x - 1)(x + 1)(x - 2).\end{aligned}$$

Alltså

$$p(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 2).$$

De reella nollställena är därför

$$\boxed{x = -1, \quad x = 1, \quad x = 2},$$

där $x = 1$ är ett dubbelt nollställe.

- (b) Bestäm ett reellt polynom $q(x)$ av lägsta möjliga grad som har nollställena i $x = 2$ och $x = i$. (2p)

Lösning. Eftersom q har reella koefficienter och i är ett nollställe måste även det komplexkonjugerade talet $-i$ vara ett nollställe. Ett polynom av lägsta möjliga grad har därför faktorerna

$$(x - 2)(x - i)(x + i) = (x - 2)(x^2 + 1).$$

Vi kan alltså välja

$$\boxed{q(x) = (x - 2)(x^2 + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2}.$$

4. Absolutbelopp.

- (a) Lös ekvationen

$$|x - 1| + |2x + 4| = 6$$

för $x \in \mathbb{R}$. (3p)

Lösning. Teckenbyten sker vid $x = -2$ och $x = 1$. Vi behandlar tre intervall.

Om $x < -2$, så

$$|x - 1| + |2x + 4| = (1 - x) + (-2x - 4) = -3x - 3.$$

Ekvationen $-3x - 3 = 6$ ger $x = -3$, vilket ligger i intervallet.

Om $-2 \leq x < 1$, så

$$|x - 1| + |2x + 4| = (1 - x) + (2x + 4) = x + 5.$$

Ekvationen $x + 5 = 6$ ger $x = 1$. Detta är randpunkten; direkt insättning visar att $x = 1$ uppfyller den ursprungliga ekvationen.

Om $x \geq 1$, så

$$|x - 1| + |2x + 4| = (x - 1) + (2x + 4) = 3x + 3.$$

Ekvationen $3x + 3 = 6$ ger $x = 1$, vilket är tillåtet.

Alltså är lösningarna

$$\boxed{x = -3 \quad \text{eller} \quad x = 1}.$$

- (b) Lös olikheten $|3x - 2| < 5$. (2p)

Lösning. Definitionen av absolutbelopp ger

$$-5 < 3x - 2 < 5.$$

Addera 2 i alla led:

$$-3 < 3x < 7.$$

Dividera med 3:

$$\boxed{-1 < x < \frac{7}{3}}.$$

5. Kombinatorik.

- (a) Hur många unika ord med 6 bokstäver kan bildas av bokstäverna i "KOKOS"? (2p)

Lösning. Anmärkning. Som uppgiften är skriven finns en motsägelse: ordet "KOKOS" innehåller endast fem bokstäver. Om varje förekomst i "KOKOS" får användas högst en gång går det därför inte att bilda ett ord med sex bokstäver; den bokstavliga tolkningen ger 0.

Den sannolikt avsedda frågan är: *Hur många unika ord med 5 bokstäver kan bildas av bokstäverna i "KOKOS"?* Då finns två K, två O och ett S. Antalet olika permutationer är

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{4} = \boxed{30}.$$

- (b) En kommitté på 4 personer ska väljas från en grupp av 6 män och 5 kvinnor. Hur många sådana kommittéer kan bildas om den måste innehålla minst två kvinnor? (3p)

Lösning. Vi delar upp efter antalet kvinnor.

- Exakt 2 kvinnor och 2 män:

$$\binom{5}{2} \binom{6}{2} = 10 \cdot 15 = 150.$$

- Exakt 3 kvinnor och 1 man:

$$\binom{5}{3} \binom{6}{1} = 10 \cdot 6 = 60.$$

- Exakt 4 kvinnor:

$$\binom{5}{4} \binom{6}{0} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Totalt får vi

$$150 + 60 + 5 = \boxed{215}.$$

6. Summor.

(a) Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

för alla $n \geq 1$. (4p)

Lösning. Vi använder matematisk induktion.

Basfall: För $n = 1$ är

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Påståendet gäller alltså för $n = 1$.

Induktionsantagande: Antag att påståendet gäller för ett godtyckligt men fixerat heltal $n \geq 1$, dvs.

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Induktionssteg: Då får vi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

där induktionsantagandet användes i den andra raden. Alltså gäller påståendet även för $n+1$.

Enligt induktionsprincipen gäller därför

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \text{för alla } n \geq 1.}$$

(b) Formulera induktionsantaganden som används i detaljer. (1p)

Lösning. Det induktionsantagande som används ovan är:

$$\boxed{\text{För ett godtyckligt men fixerat } n \geq 1 \text{ antar vi att } \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.}$$

Detta antagande används sedan för att visa motsvarande formel för $n+1$.