MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I Diskret Matematik
21 oktober 2026

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivering krävs i varje uppgift. Minst 15 poäng krävs för godkänt.

1. Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen

$$55m - 21n = 7.$$

Hur många av dessa heltalslösningar (m, n) uppfyller att $0 \leq m \leq 100$ och $0 \leq n \leq 100$? (5p)

Lösningsförslag:

Vi börjar med att bestämma $\mathrm{SGD}(55, 21)$ *med hjälp av Euklides algoritm. Vi har*

$$55 = 2 \cdot 21 + 13$$

$$21 = 1 \cdot 13 + 8$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

Som sista icke-försvinnande rest är alltså 1 *största gemensamma delare till* 55 *och* 21.

För att lösa ekvationen $55m - 21n = 1$ *skriver vi*

$$1 = 3 - 1 \cdot 2$$

$$1 = 3 - 1 \cdot (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$$

$$1 = 2 \cdot (8 - 5) - 1 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$$

$$1 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8) = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13$$

$$1 = 5 \cdot (21 - 13) - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13$$

$$1 = 5 \cdot 21 - 8(55 - 2 \cdot 21) = 21 \cdot 21 - 8 \cdot 55$$

vilket ger lösningen $m = -8$ *och* $n = -21$. *Vi skalar sedan om med* 7 *för att få en partikulärlösning till* $55m - 21n = 7$ *och erhåller* $m = -56$ *och* $n = -147$.

Den allmänna lösningen till den diofantiska ekvationen $55m - 21n = 7$ *ges nu av*

$$m = -56 + 21k \quad m = -147 + 55k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi har kvar att implementera kraven $0 \leq m \leq 100$ *och* $0 \leq n \leq 100$. *Vi får två lösningar som uppfyller detta:*

$$(7, 18) \quad \textit{och} \quad (28, 73)$$

svarande mot $k = 3$ *och* $k = 4$.

2. (a) Lös ekvationen

$$|x^2 - 1| + 2|x + 2| = 6. \qquad (3\text{p})$$

(b) Lös olikheten

$$x + \frac{1}{x+2} < 1. \qquad (2\text{p}).$$

Lösningsförslag:

(a) Uttrycket i vänsterledet har brytpunkter där något av argumenten i absolutbeloppen är noll. Vi har alltså brytpunkterna $x = -2$ *samt* $x = \pm 1$.

När $x < -2$ *fås ekvationen*

$$x^2 - 1 - 2(x + 2) = 6$$

det vill säga

$$x^2 - 2x - 11 = 0.$$

Vi löser denna andragradsekvation med kvadratkomplettering och får

$$x = 1 \pm \sqrt{12} = 1 \pm 2\sqrt{3}.$$

Endast $x = 1 - 2\sqrt{3}$ *uppfyller dock* $x < -2$.

Betrakta nu $-2 \leq x < -1$. *Här har vi ekvationen*

$$x^2 - 1 + 2(x + 2) = 6$$

det vill säga

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Rötterna till denna ekvation är $x = 1$ *och* $x = -3$ *och ingen av dessa ligger i det aktuella intervallet.*

Vi behandlar därefter $-1 \leq x < 1$. *Nu är* $x^2 - 1 \leq 0$ *och vi får*

$$-(x^2 - 1) + 2(x + 2) = 6$$

eller efter förenkling

$$(x - 1)^2 = 0.$$

Denna ekvation har en dubbelrot $x = 1$, *vilken dock inte tillhör det aktuella intervallet.*

Slutligen betraktar vi $x \geq 1$. *Då får vi*

$$x^2 - 1 + 2(x + 2) = 6$$

alltså

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Denna ekvations lösningar bestämdes tidigare till $x = 1$ *och* $x = -3$, *och nu ligger* $x = 1$ *inom det aktuella intervallet.*

Olikheten har sammanfatttningsvis de två lösningarna $x = 1$ *samt* $x = 1 - 2\sqrt{3}$.

(b) Vi skriver om olikheten som

$$x + \frac{1}{x+2} - 1 < 0$$

och bildar gemensam nämnare i västerledet, vilket ger

$$\frac{x^2 + x - 1}{x + 2} < 0.$$

Genom att kvadratkomplettera erhåller vi $x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)\left(x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)$ *vilket i sin tur ger oss olikheten*

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)\left(x + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)}{x + 2} < 0.$$

Vi har således en kvot med två faktorer i täljaren och en i nämnaren. Vi har $-2 < -\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) < -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

Olikheten är uppfylld när $x < -2$ *ty då är samtliga uttryck negativa. När* $-2 < x < \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$ *är nämnaren positiv och täljaren en produkt av två negativa faktorer, vilket gör hela uttrycket i vänsterledet positivt. För* $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ *är nämnaren positiv och en av faktorerna i täljaren positivt, den andra negativ. Hela uttrycket är då negativt och olikheten är uppfylld.*

Slutligen är uttrycket i vänsterledet positivt för $x > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ *då täljaren är en produkt av två positiva faktorer och nämnaren är positiv.*

Lösningarna till olikheten är alltså

$$x < -2 \quad \textit{och} \quad \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

3. Är n^3+2n jämnt delbart med 3 för alla naturliga tal n? Är n^3+2n jämnt delbart med 4 för alla naturliga tal n? Gör bevis eller ge motexempel. (5p)

Lösningsförslag:

Låt oss skriva $n^3+2n = n(n^2+2)$. *Vi har enligt Fermats lilla sats att* $n^2 \equiv 1$ *modulo* 3 *om* 3 *ej delar* n. *Därmed fås*

$$n^3+2n = n(n^2+2) \equiv n(1+2) = 3n \equiv 0 \qquad \bmod 3.$$

Om n *är en multipel av* 3 *innehåller* n^3+2n *också en faktor* 3 *på grund av samma omskrivning. Detta visar att* n^3+2n *är delbart med* 3 *för alla naturliga tal* n.

Låt nu $n = 1$. *Då är* $1+2 = 3$ *ej delbart med* 4 *och således är svaret på den andra frågan nej.*

4. Lös den komplexa andragradsekvationen

$$z^2 + 4iz = 7 + 4i. \qquad (5\text{p})$$

Lösningsförslag:

Vi genomför först en kvadratkomplettering och erhåller

$$z^2 + 4iz - 7 - 4i = (z+2i)^2 - 3 - 4i.$$

Variabelbytet $w = z + 2i$ *leder till andragradsekvationen*

$$w^2 - 3 - 4i = 0.$$

Nu sätter vi $w = x + iy$ *och erhåller*

$$x^2 - y^2 + 2ixy - 3 - 4i = 0.$$

Eftersom real-och imaginärdelar i vänsterled och högerled måste vara lika fås

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \textit{och} \quad 2xy = 4.$$

Vidare måste vi ha $|w|^2 = (3^2+4^2)^{1/2}$, *det vill säga*

$$x^2 + y^2 = 5.$$

Vi adderar vänsterledet och högerled i den första och tredje ekvationen och får

$$2x^2 = 8$$

vilket ger $x = \pm 2$. *Bilder vi istället differensen mellan tredje och andra ekvationen erhåller vi*

$$2y^2 = 2,$$

och därmed $y = \pm 1$. Vi måste dock även uppfylla ekvationen $2xy = 4$ vilket reducerar till lösningarna $w = 2 + i$ och $w = -2 - i$.

Slutligen har vi $z = w - 2i$ vilket ger oss lösningarna till den ursprungliga andragradsekvationen i form av

$$z = 2 - i \quad och \quad z = -2 - 3i.$$

5. (a) Finns det något moniskt polynom av grad tre vars konstantterm är positiv och vars nollställen är positiva? (2p)

   (b) Använd induktion för att bevisa sambandet

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1}$$

   för alla positiva heltal n. (3p)

   Lösningsförslag: *(a) Enligt Vietas formler gäller att*

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_0,$$

där a_0 är konstanttermen i det moniska tredjegradspolynomet p och $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ är dess nollställen. Om de senare alla är positiva och $a_0 > 0$ kan sambandet omöjligt vara uppfyllt. Ett sådant polynom existerar alltså ej.

(b) Vi undersöker först basfallet $n = 1$. I vänsterledet har vi då

$$\frac{2}{1 \cdot 2} = 1$$

och i högerledet

$$\frac{2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Detta etablerar basfallets giltighet.

Låt nu $N \geq 1$ vara fixt. Vi gör induktionsantagandet att

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{N(N+1)} = \frac{2N}{N+1}.$$

Vi önskar visa att det sökta sambandet följer för $N + 1$. Vi skriver således

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{2}{N(N+1)} + \frac{2}{(N+1)(N+2)} \\ &\qquad = \frac{2N}{N+1} + \frac{2}{(N+1)(N+2)} = \frac{2}{N+1}\left(N + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\qquad\qquad \frac{2}{N+1}\frac{N^2 + 2N + 1}{N+2} = \frac{2}{N+1}\frac{(N+1)^2}{N+2} = \frac{2(N+1)}{N+2}, \end{aligned}$$

observera att vi har implementerat induktionsantagandet i först steget. Vi har således visat att vänsterledet för $N + 1$ sammanfaller med det sökta högerledet och därmed genomfört induktionssteget.

Induktionsprincipen ger nu vid handen att det sökta sambandet gäller för alla positiva heltal.

6. Hur många ord kan bildas genom omkastning av bokstäverna i WALLAWALLA? Hur många av dessa innehåller inte AAAA? (5p)

   Lösningsförslag:

   Vi har givna tre olika bokstäver: fyra A, fyra L samt två W. Antalet möjliga ord ges alltså av multinomialkoefficienten

$$\frac{(4 + 4 + 2)!}{4!4!2!} = \frac{10!}{4!4!2!} = 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5$$

vilket ger $3,150$ *möjliga ord.*

Låt oss nu bestämma antalet möjliga ord som kan bildas av symbolen $AAAA$*, tillsammans med fyra* L *och två* W*. Vi har multinomialkoefficienten*

$$\frac{(1+4+2)!}{1!4!2!} = \frac{7!}{4!2!} = 7 \cdot 5 \cdot 3,$$

alltså 105 *ord.*

Vi får således att $3,150 - 105 = 3,045$ *ord kan bildas med bokstäverna i* $WALLA\ WALLA$ *med kravet att strängen* $AAAA$ *ej förekommer.*