# Lösningsförslag – Tentamen i Diskret matematik 2026-04-22

## 1. Grundläggande talteori och polynom

### (a)

Vi söker heltal $n$ sådana att

$$n \equiv 4 \pmod{9}.$$

Detta betyder att $n = 4 + 9k$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

Exempel:

$$4, \quad 13, \quad 22.$$

### (b)

Vi beräknar resten då $2^{101}$ delas med 33.

Notera att $33 = 3 \cdot 11$.

Mod 3:

$$2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{101} \equiv (-1)^{101} = -1 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Mod 11: Eftersom $\varphi(11) = 10$ och $(2, 11) = 1$ fås

$$2^{10} \equiv 1 \pmod{11}.$$

$$101 = 10 \cdot 10 + 1 \Rightarrow 2^{101} \equiv 2^1 = 2 \pmod{11}.$$

Alltså

$$x \equiv 2 \pmod{3}, \quad x \equiv 2 \pmod{11}.$$

Detta ger direkt

$$x \equiv 2 \pmod{33}.$$

Resten är alltså **2**.

### (c)

Polynomet är

$$3x^4 - 7x^2 + 2.$$

Enligt rationella rotsatsen är möjliga rationella rötter

$$\pm\frac{p}{q},$$

där $p$ delar konstanttermen 2 och $q$ delar ledande koefficienten 3.

$$p = \pm1, \pm2, \quad q = \pm1, \pm3.$$

Möjliga rationella rötter:

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3}.$$

## 2. Diofantiska ekvationer

Vi studerar

$$154x + 198y = n.$$

### (a)

Primtalsfaktorisering:

$$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11, \quad 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11.$$

$$\gcd(154, 198) = 2 \cdot 11 = 22.$$

### (b)

Ekvationen är lösbar om och endast om $22 \mid n$.

$$2026 = 22 \cdot 92 + 2.$$

Alltså är 2026 *inte* delbart med 22.
Ekvationen är därför **inte lösbar**.

### (c)

Minsta positiva $n$ är $\gcd(154, 198) = 22$.

Dividera ekvationen med 22:

$$7x + 9y = 1.$$

Utvidgade Euklides algoritm:

$$9 = 7 \cdot 1 + 2$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$1 = 7 - 2 \cdot 3$$
$$2 = 9 - 7$$

$$1 = 7 - (9 - 7) \cdot 3 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9.$$

Alltså

$$x_0 = 4, \quad y_0 = -3.$$

Alla lösningar:

$$x = 4 + 9t, \quad y = -3 - 7t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

# 3. Olikheter

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} \geq 0.$$

Faktorisera:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}.$$

Kritiska punkter:

$$x = -2, \ -1, \ 2.$$

Teckenschema ger lösningen:

$$[-2, -1) \cup [2, \infty).$$

# 4. Komplexa tal

Ekvationen:

$$z^2 - (4 + 2i)z + (3 + 2i) = 0.$$

Diskriminanten:

$$\Delta = (4 + 2i)^2 - 4(3 + 2i).$$

$$(4 + 2i)^2 = 16 + 16i + 4i^2 = 12 + 16i.$$

$$4(3 + 2i) = 12 + 8i.$$

$$\Delta = (12 + 16i) - (12 + 8i) = 8i.$$

Vi söker $\sqrt{8i}$.

$$8i = 8e^{i\pi/2} \Rightarrow \sqrt{8i} = \sqrt{8}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 2(1 + i).$$

Alltså

$$z = \frac{4 + 2i \pm 2(1 + i)}{2}.$$

För $+$:

$$z_1 = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i.$$

För $-$:

$$z_2 = \frac{2}{2} = 1.$$

Svar:

$$z = 3 + 2i \quad \text{eller} \quad z = 1.$$

# 5. Kombinatorik

Ordet TENTAMEN.

Bokstäver:

$$T, T, E, E, N, N, A, M.$$

## (a)

Antal permutationer:

$$\frac{8!}{2!\,2!\,2!} = \frac{40320}{8} = 5040.$$

### (b)

Antal där E står bredvid varandra:

Behandla EE som en bokstav.

Totalt 7 objekt med upprepningar T,T,N,N:

$$\frac{7!}{2!\,2!} = \frac{5040}{4} = 1260.$$

Alltså ej bredvid:

$$5040 - 1260 = 3780.$$

## 6. Induktion

Visa att

$$3^n > 2^n + 10 \quad \text{för } n \geq 3.$$

**Basfall:** $n = 3$.

$$3^3 = 27, \quad 2^3 + 10 = 18.$$

Sant.

**Induktionsantagande:**

$$3^k > 2^k + 10.$$

**Induktionssteg:**

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3(2^k + 10) = 3 \cdot 2^k + 30.$$

Vi vill visa

$$3 \cdot 2^k + 30 > 2^{k+1} + 10.$$

$$3 \cdot 2^k = 2^{k+1} + 2^k.$$

Så vänsterledet är

$$2^{k+1} + 2^k + 30.$$

Detta är större än

$$2^{k+1} + 10$$

eftersom $2^k \geq 8$ för $k \geq 3$.

Alltså gäller påståendet för $k + 1$.

Därmed gäller olikheten för alla $n \geq 3$.