Lösningsskiss tenta 2023-10-23, Analys del 1

1. (a) Vi får att $\dfrac{2x^{10}e^x+3e^{2x}}{e^{2x}+\ln(x)} = \dfrac{\frac{2x^{10}}{e^x}+3}{1+\frac{\ln(x)}{e^{2x}}} \to \dfrac{0+3}{1+0} = 3$ då $x\to\infty$.

   (b) Med en omskrivning kan vi använda våra standardgränsvärden och får

$$\frac{\sin^2(2x)\ln(1+3x)}{x^3} = \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot 12 \to 1^2\cdot 1\cdot 12 = 12$$

   då $x\to 0$.

2. Derivatans definition ger, tillsammans med förlängning med konjugat, att

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2+1)-(x^2+1)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. Om $x\neq -\frac{1}{2}$ och $y\neq\frac{3}{2}$ får vi

$$y=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{3x+1}{2x+1} \quad\Leftrightarrow\quad 2xy-3x=1-y \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1-y}{2y-3}.$$

   Funktionen f är därmed inverterbar och $f^{-1}(y)=\frac{1-y}{2y-3}$ Vi har alltså att $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-3}$, inversen definitionsmängd är alla reella tal utom $\frac{3}{2}$, och värdemängden alla reella tal utom $-\frac{1}{2}$.

4. (a) Partialintegrering ger

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}x+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}x-\frac{e^{-2x}}{4}+C = -\frac{e^{-2x}}{4}(1+2x)+C$$

$$\text{så}\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-2x}}{4}(1+2x)\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1+2N}{4e^{2N}}\right) = \frac{1}{4}.$$

   (b) Analysen huvudsats ger direkt att $f'(x)=e^{\sin^2(x)}\cos(x)$.

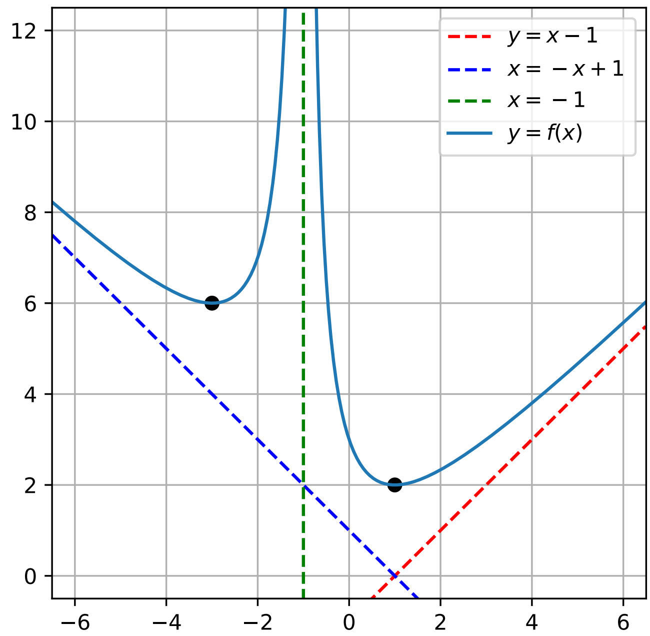
5. Funktionen $f(x)=\frac{x^2+3}{|x+1|}$ är definierad och kontinuerlig då $x\neq -1$. Den enda möjliga vertikala asymptoterna är därmed $x=-1$, och eftersom vi får $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ är det en asymptot. Vi får efter polynomdivision att $f(x)=\begin{cases} x-1+\frac{4}{x+1} & ; x>-1\\ -x+1-\frac{4}{x+1} & ; x<-1\end{cases}$ vilket ger att $y=x-1$ en sned asymptot eftersom $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$, och $y=-x+1$ är på samma sätt en sned asymptot då $x\to-\infty$.

   Vi får att $f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{4}{(x+1)^2} & ; x>-1\\ -1+\frac{4}{(x+1)^2} & ; x<-1\end{cases}$ vilket ger att $f'(x)=0$ om och endast om $(x+1)^2=4$, dvs då $x=-3$ eller $x=1$. Vidare har vi $f''(x)=\begin{cases} \frac{8}{(x+1)^3} & ; x>-1\\ \frac{-8}{(x+1)^3} & ; x<-1\end{cases}$, så andraderivatan saknar nollställen.

Vi gör en teckentabell:

x		-3		-1		1	
$f'(x)$	-	0	$+$	$\wr$	-	$\wr$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$\wr$	$\searrow$	2	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$\wr$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\wr$	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Från denna ser vi att funktionen har lokala minimum i $x = -3$, och i $x = 1$. Grafen är konvex på intervallen $]-\infty, -1[$ och $]-1, \infty]$. Slutligen skissar vi grafen, från vilken vi kan dra slutsatsen at funktionens värdemängd är $[2, \infty[$.



6. Låt $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + 1$ och $g(x) = 1 - x^2$. Tangenten till $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ har ekvationen

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2(a+1)x - a^2 + 2.$$

Tangenten till $y = g(x)$ i en punkt $(b, g(b))$ har ekvationen

$$y - g(b) = g'(b)(x - b) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2bx + b^2 + 1.$$

Dessa tangenter sammanfaller precis då

$$\begin{cases} 2(a+1) = -2b \\ -a^2 + 2 = b^2 + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a - 1 \\ -a^2 + 2 = (a+1)^2 + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -a - 1 \\ a(a+1) = 0 \end{cases}$$

så för $(a, b) = (0, -1)$ och för $(a, b) = (-1, 0)$, vilket ger tangenterna $y = 2x + 2$ resp. $y = 1$.