MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Lösningsförslag
Analys del 1, Matematik I, 4 hp
Matematik I
den 28 oktober 2024

1. Undersök om de följande gränsvärdena existerar och beräkna dem i så fall med metoderna från kursen (särskilt, utan att använda l'Hospitals regel).

   (a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2}$ 3 p

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\ln(x+1)}$ 3 p

(a) $$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2} = \frac{\cancel{x^2}+x+1-(\cancel{x^2}+2)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2}} = \frac{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}+\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{x^2}}_{\to 0}}} \to \frac{1}{1+1}$$

förläng med konjugatuttrycket

förkorta med dominerande termen i nämnaren $x = \sqrt{x^2}$ $x > 0$!

Svar: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+2} = \frac{1}{2}$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 7x}{7x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{\ln(x+1)}}_{\to 1} \cdot 7 = 7$$

standardgränsvärden

även produkt o kvotregel

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\ln(x+1)} = 7$

2. (a) Låt 5 p

$$g(x) = x\ln(x), \qquad x > 0.$$

Undersöka funktionens beteende och skissa grafen till g.
Ange speciellt alla lokala extrempunkter samt ett intervall där g är avtagande.

Anmärkning: Din undersökning och skiss ska också visa tydligt vad som händer på randen av definitionsmängden. Konvexitetsegenskaper och asymptoter behöver dock ej undersökas!

(b) Skissa utifrån dina resultat i (a) (utan vidare beräkningar) grafen till funktionen 1 p

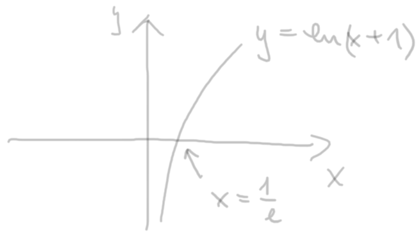
$$h(x) = |x|\ln(|x|), \qquad x \neq 0.$$

(a) $g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$g'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0$

$\iff \ln x = -1$

$\iff x = e^{-1}$



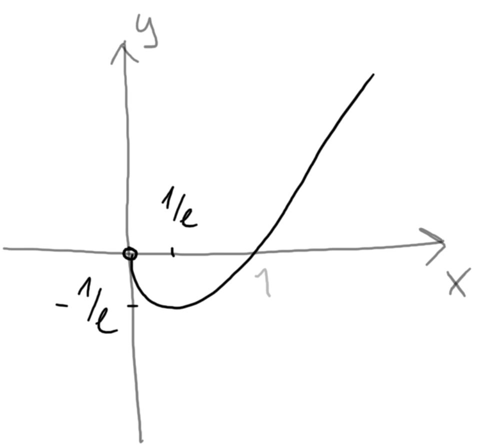
teckentabell:

		e^{-1}	
g'	$-$	0	$+$
g	0 ↘	$-\frac{1}{e}$	↗ $+\infty$

$g(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{e}$

$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$ standard gränsvärde

$\lim_{x \to \infty} x\ln x = \infty$



OBS: $g'(x) \to -\infty$ då $x \to 0^+$

Svar: $x=\frac{1}{e}$ lokal minimipunkt

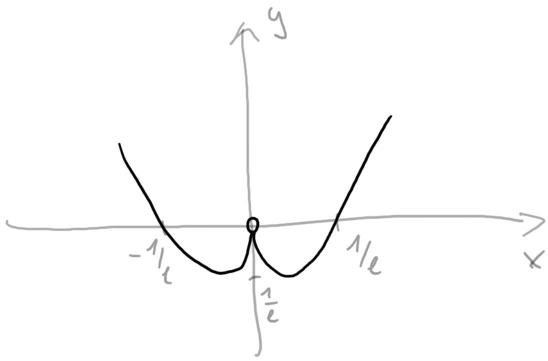
ingen lokal maximipunkt

g (strikt) avtagande på $]0,\frac{1}{e}]$.

(b) $h(x)=|x|\ln|x| \quad x\neq 0$

Vi observerar: $h(-x)=h(x)$, dvs h är jämn

$h(x)=g(x)$ för $x>0$, dvs h överensstämmer med g för $x>0$.



3. Betrakta funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

(a) Beräkna funktionens derivata f'. 3 p

(b) i. Ange den största möjliga definitionsmängden för f.

ii. Är f jämn, udda eller varken eller? Motivering krävs.

iii. Beräkna $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

iv. Skissa grafen till f. 3 p

(a) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1\cdot(1-\cancel{x}) - (1+\cancel{x})\cdot(-1)}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-1\cdot(1+\cancel{x}) - (1-\cancel{x})\cdot 1}{(1+x)^2}$$

kedjeregel
kvotregel

$$= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} + \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = 0$$

(b) (i) f definierad då $x \neq \pm 1$

$D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq -1\}$

(ii) $$f(-x) = \arctan\frac{1+(-x)}{1-(-x)} + \arctan\frac{1-(-x)}{1+(-x)} =$$

$$= \arctan\frac{1-x}{1+x} + \arctan\frac{1+x}{1-x} = f(x)$$

$\Rightarrow f$ jämn

(iii) $$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\overset{\to -1}{\frac{1+x}{1-x}}\right) + \arctan\left(\overset{\to -1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = 2\arctan(-1) = -2\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

då $\frac{1+x}{1-x} = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} \to -1$

arctan kontinuerlig

(iv) $f'(x) = 0$ för $x \neq \pm 1$

$\Rightarrow f$ konstant i varje delintervall av definitionsmängden.

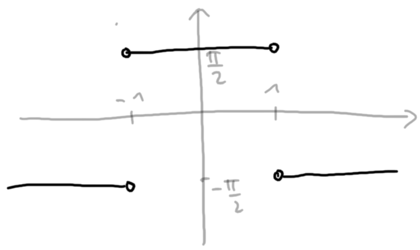
		-1		1	
f	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$

f jämn

pga (iii)

$f(0) = 2 \cdot \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$

Skiss



4. (a) Bestäm $\int \frac{\sin(2x)}{\sin^5(x)}dx$. 3 p

(b) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\infty (x^2+3x)e^{-x}dx$ är konvergent eller divergent och bestäm i så fall dess värde. 3 p

(a) $$\int \frac{\sin 2x}{\sin^5 x}\,dx = \int \frac{2\,\cancel{\sin x}\cos x}{\sin^{\cancel{5}\,4} x}\,dx = 2\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx =$$

$\int (f(x))^\alpha f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(f(x))^{\alpha+1}$

$$= 2\cdot\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{\sin^3 x} + C$$

(b) Vi beräknar först den primitiva funktionen.

$$\int (x^2+3x)e^{-x}\,dx = (x^2+3x)\cdot(-e^{-x}) - \int -(2x+3)e^{-x}\,dx$$

partiell integration

$$= e^{-x}\cdot(-x^2-3x) + (-e^{-x})(2x+3) - \int (-e^{-x})\cdot 2\,dx =$$

$$= e^{-x}\cdot(-x^2-3x-2x-3-2)$$

$$= e^{-x}\cdot(-x^2-5x-5)$$

Då blir den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty (x^2+3x)e^{-x} = \lim_{B\to\infty}\left[e^{-x}(-x^2-5x-5)\right]_0^B =$$

0 standardgränsvärde

$$= \lim_{B\to\infty} e^{-B}(-B^2-5B-5) - e^0\cdot(-5)$$

$$= 5$$

Svar: $\int_0^\infty (x^2+3x)e^{-x}\,dx = 5$

5. (a) Visa utifrån derivatans definition: Om en funktion f är deriverbar, så är även funktionen $g(x) = \big(f(x)\big)^2$ deriverbar och $g'(x) = 2f(x)f'(x)$. 3 p

(b) Ange för vart och ett av de följande påståendena om det är sant eller ej. 3 p
Endast motiverade svar kan ge poäng!

i. För varje lokal extrempunkt $x = a$ av en funktion h gäller att $h'(a) = 0$.

ii. Om h har en primitiv funktion H som är icke-negative, dvs $H(x) \geq 0$ för alla x i definitionsintervallet, så är h växande.

(a) Vi vill visa att $g(x)$ är deriverbar i x:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(f(x+h))^2-(f(x))^2}{h} =$$

konjugatregel

$$= \frac{(f(x+h)-f(x))\cdot(f(x+h)+f(x))}{h} \to f'(x)\cdot(f(x)+f(x))$$

$f'(x)$, ty f deriverbar

$f(x)$

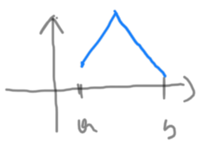
f kontinuerlig (ty deriverbar)

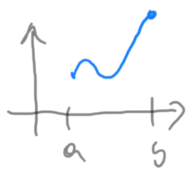
Vi har då visat

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)\cdot 2f(x),$$ dvs

g är deriverbar med derivatan $g' = 2f\cdot f'$.

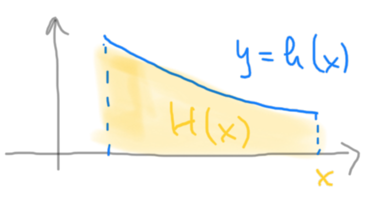
(b) (i) falsk:





Lokala extrempunkter kan även finnas på randen av definitionsmängden, eller i punkter då h ej deriverbar.

(ii) falsk:



T.ex. $h(x) = \frac{1}{x}$ $x \geq 1$

$H(x) = \ln x$ $x \geq 1$