

Inga hjälpmedel tillåtna. 15 poäng ger säkert godkänt
Samtliga svar måste motiveras ordentligt!

1. Undersök om de följande gränsvärdena existerar och beräkna dem i så fall med metoderna från kursen (särskilt, utan att använda l'Hospitals regel).

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ 2 p

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin^4(x) - \cos(x)) \cdot e^{-x^3}$ 2 p

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos(2x)}$ 2 p

2. (a) Undersök följande funktionens beteende och skissa grafen till funktionen 5 p

$$g(x) = (x^2 - 3)e^x.$$

Ange speciellt alla lokala och globala extrempunkter.

Anmärkning: Konvexitetsegenskaper och asymptoter behöver dock ej undersökas!

- (b) Ange en definitionsmängd \mathcal{D}_f sådan att funktionen $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, där $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ har en värdemängd \mathcal{V}_f som endast innehåller negativa tal. 1 p

3. (a) Bestäm alla vertikala asymptoter av funktionen 3 p

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x} e^{-1/x^2}.$$

- (b) Bestäm alla sneda asymptoter av funktionen 3 p

$$g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}.$$

4. (a) Bestäm $\int (e^{2x} - e^{3x}) \sin(e^x) dx$. 3 p

(b) Beräkna $\int_1^4 \frac{3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^3 + \sqrt{x} + 2} dx$. 3 p

Anmärkning: Det finns en anledning att integranden inte är förenklad!

5. (a) Visa utifrån derivatans definition: Om en funktion f är deriverbar och $f(x) \neq 0$, så är även funktionen $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ deriverbar och $g'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$. 3 p

- (b) I den här frågan är exempel efterfrågade. Exempelen kan ges genom att skissa grafen till en funktion! 3 p

i. Ange ett exempel på en funktion som är växande i intervallet $[-1, 1]$ och avtagande i intervallet $[1, 3]$.

ii. Ange ett exempel på en funktion som är injektiv och har en lokal maximipunkt i $x = 3$.

Lycka till!