MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Lösningsförslag i
Analys del 1, Matematik I, 4 hp
Matematik I
den 11 december 2024

1. Undersök om de följande gränsvärdena existerar och beräkna dem i så fall med metoderna från kursen (särskilt, utan att använda l'Hospitals regel).

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$ 2 p

(p.g.a kontinuitet) (standardgränsvärde)

$$\frac{e^{2x}-e^x}{x} = \underbrace{e^x}_{\to e^0}\cdot\underbrace{\frac{(e^x-1)}{x}}_{\to 1} \to e^0 = 1 \quad \text{då } x\to 0$$

Svar: 1

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sin^4(x)-\cos(x)\right)\cdot e^{-x^3}$ 2 p

$$\underbrace{(\sin^4 x-\cos x)}_{\text{begränsad}}\cdot \underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{-x^3}}}_{\to 0} \to 0 \quad \text{då } x\to\infty$$

Svar: 0

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\cos(2x)}$ 2 p

$$\frac{x}{1-\cos 2x} = \frac{x}{1-(\cos^2 x-\sin^2 x)} = \frac{x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sin x} = -\infty$$

alltså existerar ej gränsvärdet

Svar: finns ej

2. (a) Undersök följande funktionens beteende och skissa grafen till funktionen 5 p

$$g(x) = (x^2 - 3)e^x.$$

Ange speciellt alla lokala och globala extrempunkter.

Anmärkning: Konvexitetsegenskaper och asymptoter behöver dock ej undersökas!

Vi ser att g är deriverbar i hela $\mathbb{R}$ och saknar symmetrier.

$$g'(x) = (2x + x^2 - 3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$$

		-3		1	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$

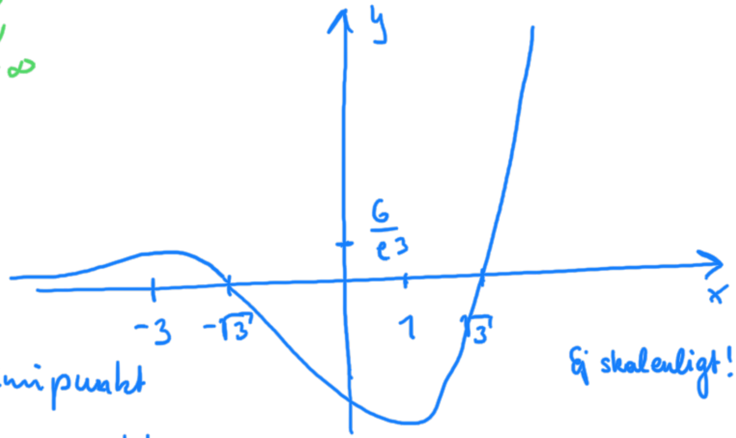
$g(-3) = \frac{6}{e^3}$

$g(1) = -2e$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3)e^x = 0$$

(p.g.a. standardgränsvärdet $\frac{a^x}{x^k} \to \infty$ då $x \to \infty$ för $a > 1$)

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x^2 - 3)}_{+\infty}\underbrace{e^x}_{+\infty} = +\infty$$



Svar:

$x = 1$ global minimipunkt

$x = -3$ lokal maximipunkt

global maximipunkt saknas

(b) Ange en definitionsmängd $\mathcal{D}_f$ sådan att funktionen $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, där $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ har en värdemängd $\mathcal{V}_f$ som endast innehåller negativa tal. 1 p

t.ex. $D_f = [-1, 1]$ ty $f(x) = (x^2 - 3)e^x < 0$ för $-1 \leq x \leq 1$

Varje delmängd av $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$ duger som exempel.

3. (a) Bestäm alla vertikala asymptoter av funktionen 3 p

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x} e^{-1/x^2}.$$

Kandidater för vertikala asymptoter är nämnarens nollställen.

$x^2 + x = 0 \iff x(x+1) = 0 \iff x = 0$ eller $x = -1$.

$x = -1$: $\lim_{x \to -1^+} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to -1} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to e^{-1}} = -\infty \Rightarrow x = -1$ är asymptot

$\lim_{x \to -1^-} \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to -\infty} \cdot \frac{1}{x} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\to -\frac{1}{e}} = +\infty$ (behövs ej för slutsatsen)

$x = 0$: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2+x} e^{-1/x^2} \underset{\left[x = \frac{1}{t}\right]}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}} e^{-t^2} = \lim_{t \to \infty} \underbrace{\frac{t^2}{e^{t^2}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+t}}_{\to 0} = 0$

Svar: $x = -1$

$\Rightarrow x = 0$ ej asymptot.

(b) Bestäm alla sneda asymptoter av funktionen 3 p

$$g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}.$$

• $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \underset{x>0}{=} \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 2$

$\lim_{x \to \infty} g(x) - 2x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2-1} - 2x = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \cancel{(2x)^2}}{\sqrt{4x^2-1} + 2x} = 0$

alltså: $y = 2x$ är asymptot då $x \to +\infty$

• nu för $x \to -\infty$: $\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \underset{x<0}{=} -\sqrt{\frac{4x^2-1}{x^2}} \to -2$ då $x \to -\infty$

$\sqrt{4x^2-1} - (-2x) = \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \cancel{(2x)^2}}{\sqrt{4x^2-1} \underbrace{- 2x}_{\to +\infty}} \to 0$ då $x \to -\infty$

Svar: $y = 2x$ asymptot då $x \to +\infty$

$y = -2x$ asymptot då $x \to -\infty$

4. (a) Bestäm $\int (e^{2x} - e^{3x})\sin(e^x)dx$. 3 p

Variabel substitution $e^x = t \iff x = \ln t$

$$dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int (e^{2x} - e^{3x})\sin(e^x)dx = \int (t^2 - t^3)\sin t \cdot \frac{dt}{t} = \int (t - t^2)\sin t\, dt =$$

partiell integration

$$= (t - t^2)(-\cos t) - \int (1-2t)\cdot(-\cos t)\,dt =$$

$$= (t^2 - t)\cos t + (1-2t)\sin t - \int (-2)\cdot \sin t\, dt =$$

$$= (t^2 - t)\cos t + (1-2t)\sin t - 2\cos t + C$$

$$= (e^{2x} - e^x - 2)\cos(e^x) + (1 - 2e^x)\sin(e^x) + C$$

(b) Beräkna $\int_1^4 \frac{3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^3 + \sqrt{x} + 2} dx$. 3 p

Anmärkning: Det finns en anledning att integranden inte är förenklad!

$$\int_1^4 \frac{3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^3 + \sqrt{x} + 2}\,dx = \Big[\ln|x^3 + \sqrt{x} + 2|\Big]_1^4 =$$

$$= \ln(64 + 2 + 2) - \ln 4 = \ln\frac{68}{4} = \ln 17$$

Vi använde $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$.

5. (a) Visa utifrån derivatans definition: Om en funktion f är deriverbar och $f(x) \neq 0$, så är även funktionen $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ deriverbar och $g'(x) = -\dfrac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$. 3 p

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{f(x)-f(x+h)}{h \cdot f(x+h)\, f(x)} =$$

$$= -\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x) \text{ enligt derivatans definition}} \cdot \frac{1}{\underbrace{f(x+h)}_{\to f(x),\text{ ty } f \text{ deriverbar och därmed kontinuerlig}}\, f(x)} \longrightarrow -f'(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^2} \text{ då } h \to 0.$$

$\lim_{h \to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ existerar och därmed är g deriverbar med

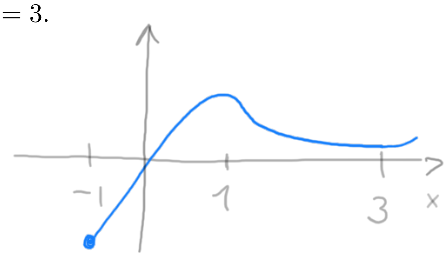
$$g'(x) = -f'(x) \cdot \frac{1}{(f(x))^2}$$

(b) I den här frågan är exempel efterfrågade. Exemplen kan ges genom att skissa grafen till en funktion! 3 p

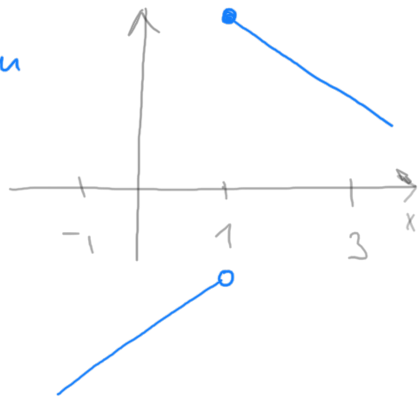
i. Ange ett exempel på en funktion som är växande i intervallet $[-1, 1]$ och avtagande i intervallet $[1, 3]$.

ii. Ange ett exempel på en funktion som är injektiv och har en lokal maximipunkt i $x = 3$.

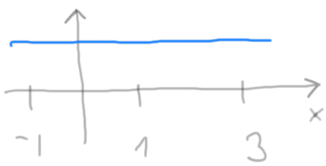
(i) t.ex.



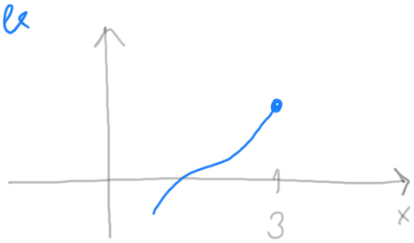
men även



eller



(ii) t.ex.



eller