Lösningsskiss tenta 2025-03-20, Analys del 1

1. (a) Om vi bryter ur och förkortar med de dominerande termarna e^{2x} får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} - 2x^2 e^x}{3e^x + 4\sqrt{1+e^{4x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2x^2}{e^x}}{\frac{3}{e^x} + 4\sqrt{e^{-4x}+1}} = \frac{1-0}{0+4\sqrt{0+1}} = \frac{1}{4}.$$

(b) Med substitutionen $t = x+1$ får vi

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t+3}{t}\right)^{2(t-1)} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{3}{t}\right)^{2t-2},$$

med substitutionen $s = t/3$ och standardgränsvärdet för e får vi vidare

$$\lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{3}{t}\right)^{2t-2} = \lim_{s\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right)^6 \left(1+\frac{1}{s}\right)^{-2} = e^6 \cdot 1^{-2} = e^6.$$

2. Vi ser att funktionen $f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x+1|+1}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$. Därmed saknas vertikala asymptoter. Vi får efter polynomdivision att

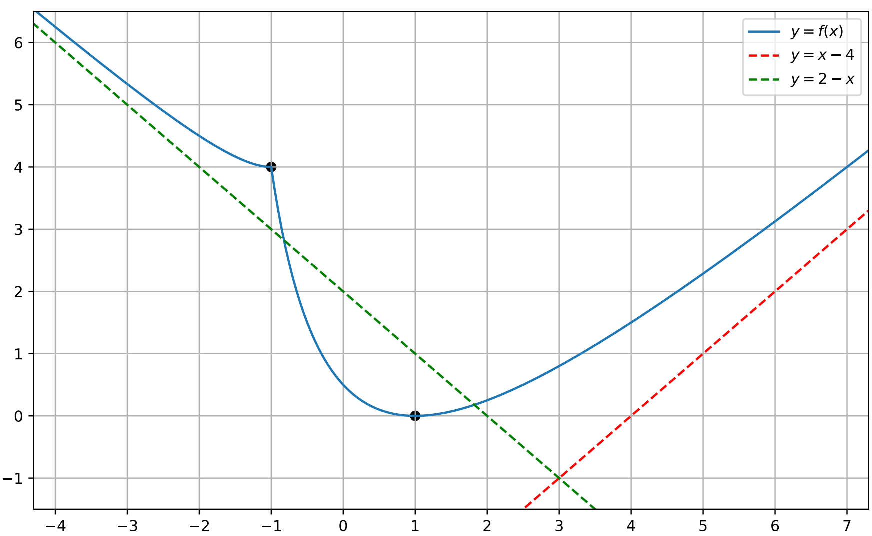
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{(x+1)+1} & ; x+1 \geq 0 \\ \frac{x^2-2x+1}{-(x+1)+1} & ; x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 4 + \frac{9}{x+2} & ; x \geq -1 \\ -x + 2 - \frac{1}{x} & ; x < -1 \end{cases}$$

Därmed är $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - (x-4)) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9}{x+2} = 0$, så $y = x-4$ är en sned asymptot, och på motsvarande sätt får vi $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (-x+2)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, så även $y = 2-x$ är en sned asymptot.

Funktionens derivata blir $f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{9}{(x+2)^2} & ; x > -1 \\ -1 + \frac{1}{x^2} & ; x < -1 \end{cases}$ så man får enkelt att ekvationen $f'(x) = 0$ saknar lösningar för $x < -1$, men har en unik lösning $x = 1$ för $x > -1$. Vi gör en teckentabell:

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vi ser från denna att grafen har ett globalt minimum $f(1) = 0$, men inga andra lokala extrempunkter. Vi kan nu skissa grafen:



3. (a) Med partialintegrering får vi

$$\int x \cdot 2^x \, dx = \int x \cdot e^{\ln(2)x} \, dx = x \frac{e^{\ln(2)x}}{\ln(2)} - \int \frac{e^{\ln(2)x}}{\ln(2)} \, dx$$

$$= x \frac{e^{\ln(2)x}}{\ln(2)} - \frac{e^{\ln(2)x}}{(\ln(2))^2} + C = \frac{1}{(\ln(2))^2} \left(\ln(2)x - 1\right) 2^x + C.$$

(b) Vi gör en substitution och får: $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)} \, dx = \left[\substack{u=\sin(x),\\ du=\cos(x)\,dx}\right]$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \Big[\arctan(u)\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. (a) Om $x < 2$ får vi

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = \ln(2-x) + 3 \;\Leftrightarrow\; \ln(2-x) = y - 3$$

$$\Leftrightarrow\; 2 - x = e^{y-3} \;\Leftrightarrow\; x = 2 - e^{y-3}.$$

Funktionen f är därmed inverterbar och $f^{-1}(y) = 2 - e^{y-3}$. Vi har alltså att $f^{-1}(x) = 2 - e^{x-3}$, och inversen definitionsmängd är $\mathbb{R}$, och dess värdemängd intervallet $]-\infty, 2[$.

(b) Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla $x \neq 0$, vilket ger bara en möjlig vertikala asymptoter. Dock har vi $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\pi/2$ och $\lim_{x\to 0-} f(x) = \pi/2$ vilket visar att $x = 0$ inte är någon asymptot. Vi får vidare att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(1) = \pi/4$ så $y = \pi/4$ är grafens enda asymptot.

5. (a) Vi kan exempelvis ta gränsvärdena

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$, ii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$, iii. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3}$, iv. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

(b) Derivatans definition ger att

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\sqrt{|h|}}{h} \\ &= [\text{förlänger med konjugatet}] = \lim_{h\to 0} \frac{((1+h) - 1)\sqrt{|h|}}{\left(\sqrt{1+h} + 1\right) h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{0}{1+1} = 0. \end{aligned}$$

Funktionen $f(x)$ är därmed derivarbar i punkten $x = 0$, och vi har $f'(0) = 0$.