MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Analys del 1, Matematik I, 4 hp
den 13 maj 2025

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

1. Bestäm med delkursens metoder (så t ex inte med l'Hospitals regel) gränsvärdena

   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+b}\right)$, där a, b är reella konstanter, (3p)

   (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\sin(3x)}{x\sin(2x)}$. (3p)

2. (a) Undersök lokala och globala extremvärden samt asymptoter till funktionen (4p)

   $$f(x) = (2x-1)e^{-x^2},$$

   och skissera grafen (konvexitet behöver inte undersökas).

   (b) Bestäm, med noggrann motivering, hur många inflektionspunkter grafen har (punkterna behöver *inte* bestämmas). (2p)

3. (a) Bestäm $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,dx$. (3p)

   (b) Avgör om den generaliserade integralen (3p)

   $$\int_1^\infty \frac{1}{3x^2+1}\,dx$$

   är divergent eller konvergent och bestäm i så fall dess värde.

4. (a) Bestäm definitionsmängden för funktionen $f(x) = \arcsin(1/x)$. (2p)

   (b) Bestäm alla asymptoter till funktionen $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{|x|}$. (4p)

5. (a) Ge ett exempel på en strängt växande och deriverbar funktion $h(x)$ på $\mathbb{R}$ som uppfyller $h'(1) = 0$. (2p)

   (b) Antag att $f(x)$ är en positiv och deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. (4p)
   Om $g(x) = \sqrt{f(x)}$, visa utifrån derivatans definition att

   $$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$