Lösningsskiss tenta 2025-05-13, Analys del 1

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi $\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+b}$

$$= \frac{(n^2+an)-(n^2+b)}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+b}} = \frac{a}{\sqrt{1+a/n}+\sqrt{1+b/n^2}} \to \frac{a}{2}$$

då $n \to \infty$.

(b) Med lämpliga förlängningar och standardgränsvärdet för sinus får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\sin(3x)}{x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

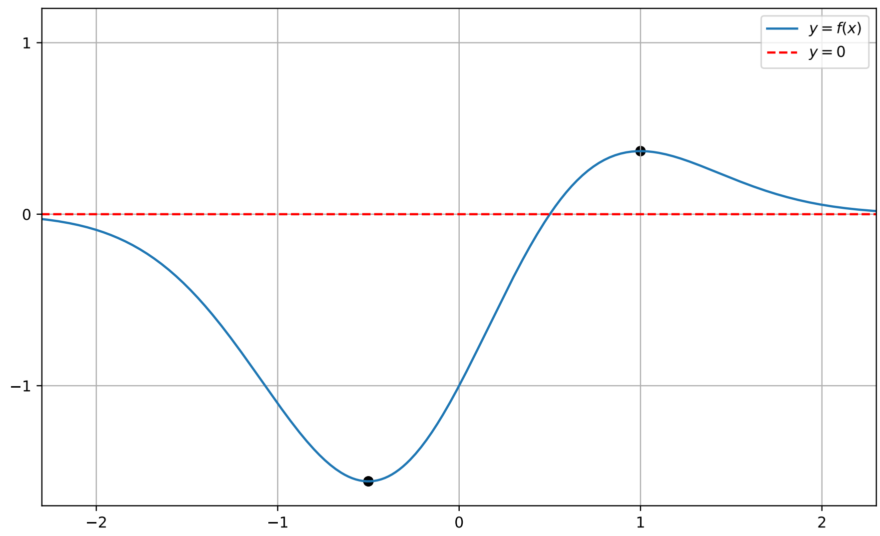
2. (a) Vi ser att funktionen $f(x) = (2x-1)e^{-x^2}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$. Därmed saknas vertikala asymptoter. Vi har dock att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

så $y = 0$ är en tvåsidig horisontell asymptot.
Efter förenkling får vi $f'(x) = 2(1-x)(2x+1)e^{-x^2}$ så derivatans nollställen är vid $x = 1$ och vid $x = -1/2$. Vi gör en teckentabell:

x		$-1/2$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-2/\sqrt[4]{e}$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$

Vi kan nu skissa grafen:



Vi ser från denna att grafen har ett globalt minimum $f(-1/2) = -2/\sqrt{e}$, och ett globalt max $f(1) = 1/e$.

(b) Vi får $f''(x) = 2(4x^3 - 2x^2 - 6x + 1)e^{-x^2}$ vilket visar att andraderivatan kan ha högst 3 nollställen, men eftersom

$$f''(-10) < 0, \qquad f''(0) > 0, \qquad f''(1) < 0, \qquad f''(10) > 0,$$

så har $f''(x)$ precis 3 teckenväxlingar, så vi har därmed 3 inflektionspunkter.

3. (a) Med partialintegrering får vi $\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}.$

(b) Vi får $\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} u=\sqrt{3}x \\ du=\sqrt{3}dx \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(u) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x) + C$, så

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}x)\right]_1^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\arctan(\sqrt{3}N) - \arctan(\sqrt{3})\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

4. (a) Definitionsmängden för arcsin är $[-1,1]$, så $f(x)$ är definierad precis då $|1/x| \leq 1$, dvs då $|x| \geq 1$, så $D_f =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$.

(b) Funktionen $f(x)$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \neq 0$ så den enda möjliga vertikala asymptoten är $x = 0$. Nu gäller $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, så $x = 0$ är verkligen en asymptot. Vi får vidare att

$$f(x) = \begin{cases} -x-1-\frac{1}{x} & ; x < 0 \\ x+1+\frac{1}{x} & ; x > 0 \end{cases}$$

så $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (-x-1)) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x} = 0$, så $y = -x-1$ är en asymptot då $x \to -\infty$. På samma sätt fås att $y = x+1$ är en asymptot då $x \to \infty$.

5. (a) Man kontrollerar lätt att t ex $h(x) = (x-1)^3$ uppfyller kraven.

(b) Derivatans definition, följt av en förlängning med konjugat, ger

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h(\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}} \\ &= f'(x)\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \end{aligned}$$

där vi i gränsövergången även utnyttjat att en deriverbar funktion alltid är kontinuerlig.