Lösningsskiss tenta 2025-08-15, Analys del 1

1. (a) Eftersom $|1-x| = -(1-x) = x-1$ då $x > 1$ får vi om vi förlänger med konjugatuttrycket att $\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{|1-x|} = \lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1+} \frac{(x^2+3)-2^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Med logaritmlagarna och standardgränsvärdet för sinus får vi

$$\lim_{x\to 0+} \left(\ln(2x) - \ln(\sin(x))\right) = \lim_{x\to 0+} \ln\left(\frac{2}{\frac{\sin(x)}{x}}\right) = \ln(2).$$

2. Vi ser att funktionen $f(x) = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$. Därmed saknas vertikala asymptoter. Vi har dock att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1,$$

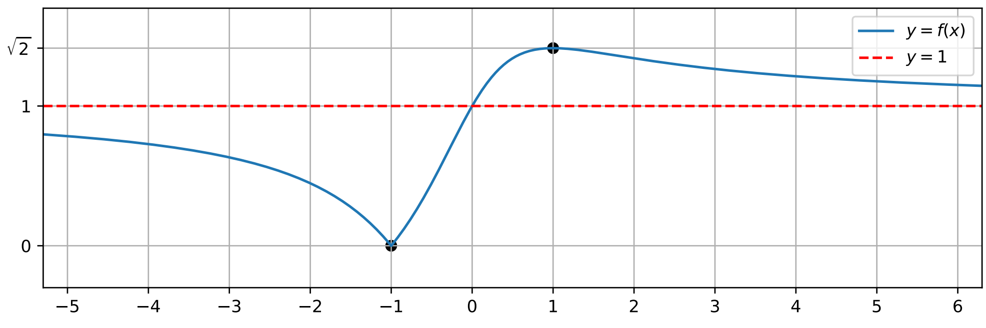
så $y = 1$ är en tvåsidig horisontell asymptot. Efter förenkling får vi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{(x^2+1)^{3/2}} & \text{om } x < -1, \\ \frac{1-x}{(x^2+1)^{3/2}} & \text{om } x > -1. \end{cases}$$

så derivatans enda nollställe är vid $x = 1$. Vi gör en teckentabell:

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	$\wr$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$

Vi kan nu skissa grafen:



Vi ser från denna att grafen har ett globalt minimum $f(-1) = 0$, och ett globalt max $f(1) = \sqrt{2}$.

3. (a) Med upprepad partialintegrering får vi

$$\int x^3 e^x\,dx = x^3e^x - \int 3x^2 e^x\,dx = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - \int 2xe^x\,dx\right)$$
$$= (x^3 - 3x^2)e^x + 6\int xe^x\,dx = (x^3-3x^2)e^x + 6\left(xe^x - \int e^x\,dx\right)$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C.$$

(b) Den primitiva funktionen är

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x \\ du = e^x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$$

så vi får

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{N\to\infty}\Big[\arctan(e^x)\Big]_0^N$$
$$= \lim_{N\to\infty}\Big(\arctan(e^N) - \arctan(1)\Big) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Låt $f(x) = \ln(x)$, vilket ger att $f'(x) = \frac{1}{x}$. Tangenten till $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ har ekvationen

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad y - \ln(a) = \frac{1}{a}(x-a). \tag{1}$$

Denna tangent passerar punkten $(x, y) = (0, 1)$ om

$$1 - \ln(a) = \frac{1}{a}(0-a). \;\Leftrightarrow\; \ln(a) = 2 \;\Leftrightarrow\; a = e^2.$$

Insättning av detta värde på a i ekvation (1) ger den unika tangenten

$$y = e^{-2}x + 1.$$

5. (a) Derivatans definition ger

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(x\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x+h)\right)$$
$$= xf'(x) + f(x),$$

där vi i gränsövergången även utnyttjat att en deriverbar funktion alltid är kontinuerlig.

(b) Vi kam inte dra någon slutsats om huruvida $g(x)$ har en lokal extrempunkt i punkten $x = 0$. Om t ex $f(x) = x$ får vi $g(x) = x^2$ som har ett minimum i $x = 0$. Om vi istället har t ex $f(x) = x^2$ får vi $g(x) = x^3$ som inte har en extrempunkt i $x = 0$.