MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Analys del 1, Matematik I, 4 hp
den 27 oktober 2025

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

1. Bestäm med delkursens metoder (så t.ex. inte med l'Hospitals regel) gränsvärdena
   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-1}-1}$, (3p)
   (b) $\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(2+x)-\ln(x)\right)$. (3p)

2. Undersök lokala och globala extremvärden och asymptoter till funktionen (6p)
$$f(x) = \frac{|x|-1}{e^x},$$
samt skissera grafen. Konvexitet behöver inte undersökas.

3. (a) Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{3} + 2$. Ange speciellt inversens definitionsmängd och värdemängd. (3p)
   (b) En talföljd $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ definieras genom $\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_k = \frac{4-a_{k-1}}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$ (3p)
   Beräkna a_1, a_2 och a_3. Rita en situationsbild (ett s.k. spindeldiagram) över talföljden, och dra slutsatser från figuren om talföljden verkar ha något gränsvärde då $k \to \infty$.

4. (a) Bestäm $\int x^7 \ln(x)\, dx$. (3p)
   (b) Beräkna integralen $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\, dx$. (3p)

5. (a) Låt $f(x) = e^{2x}\sin(3x)$. Bestäm $f'(0)$ direkt utifrån derivatans definition. (2p)
   (b) Derivera funktionen $f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{t^2}\, dt$. (2p)
   (c) Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ vars graf $y = f(x)$ har asymptoterna $x = 0$ och $y = x - 1$. Motivera noga. (2p)