Lösningsskiss tenta 2025-10-27, Analys del 1

1. (a) Förlänger vi med både täljarens och nämnarens konjugat fås då $x \to 2$ att

$$\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x+7}+3} \to \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}.$$

   (b) Vi får med logaritmlagarna och en substitution att

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(2+x) - \ln(x)\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \begin{bmatrix} t = x/2 \\ t \to \infty \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = 2\lim_{t\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = 2\ln(e) = 2,$$

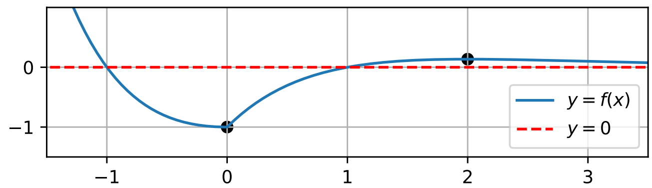
   där vi använt standardgränsvärdet för e.

2. Funktionen $f(x) = (|x|-1)e^{-x}$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, så vertikala asymptoter saknas. Vi har $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, så $y = 0$ är en horisontell asymptot. Eftersom $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ saknas sned asymptot då $x \to -\infty$.

   Vi får efter förenkling att $f'(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{om } x < 0, \\ (2-x)e^{-x} & \text{om } x > 0. \end{cases}$ så derivatan är bara 0 vid $x = 2$. Vi gör en teckentabell

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	$\wr$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$

   och med hjälp av den kan vi skissa grafen:



   Vi ser från den att vi har ett globalt minimum i $x = 0$, och ett lokalt maximum i $x = 2$, men att globalt maximum saknas.

3. (a) Om $x > -1$ får vi

$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{\ln(1+x)}{3} + 2 \;\Leftrightarrow\; \ln(1+x) = 3y - 6$$
$$\Leftrightarrow\; 1 + x = e^{3y-6} \;\Leftrightarrow\; x = e^{3y-6} - 1.$$

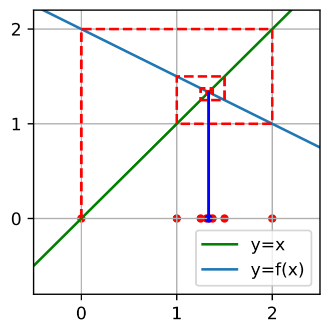
   Funktionen f är därmed inverterbar och $f^{-1}(y) = e^{3y-6} - 1$. Vi har alltså att $f^{-1}(x) = e^{3x-6} - 1$, och inversens definitionsmängd är $\mathbb{R}$, och dess värdemängd intervallet $]-1,\ \infty[$.

   (b) Vi får att $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ och $a_3 = 3/2$. Om vi inför funktionen $f(x) = (4-x)/2$ så ges rekursionsformeln av $a_k = f(a_{k-1})$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

   Vi ska rita de två graferna $y = f(x)$ och $y = x$ i samma koordinatsystem. Vi får kurvornas skärningspunkt av

$$x = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{4-x}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 4/3,$$

   så det finns bara en skärningspunkt. Spindeldiagrammet blir:



Från detta är det klart att talföljden kommer konvergera mot skärningspunkten, så vi drar slutsatsen att $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 4/3$.

4. (a) Med partialintegrering får vi $\displaystyle\int x^7 \ln(x)\,dx = \frac{x^8}{8}\ln(x) - \int \frac{x^8}{8}\frac{1}{x}\,dx$
$\displaystyle = \frac{x^8}{8}\ln(x) - \frac{1}{8}\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8}\ln(x) - \frac{1}{8}\frac{x^8}{8} + C = \frac{1}{64}x^8\Big(8\ln(x) - 1\Big) + C.$

   (b) Vi gör substitutionen $t = \sqrt{x}$ följt av en partialintegrering och får:

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = 2\int_0^2 te^t\,dt = 2\left(\Big[te^t\Big]_0^2 - \int_0^2 e^t\,dt\right)$$
$$= 4e^2 - 2\Big[e^t\Big]_0^2 = 2e^2 + 2.$$

5. (a) Derivatans definition ger att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{2h}\sin(3h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 3\cdot e^{2h}\cdot\frac{\sin(3h)}{3h} = 3\cdot e^0\cdot 1 = 3,$$

där vi använt standardgränsvärdet för sinus.

   (b) Med integralkalkylens huvudsats och kedjeregeln får vi

$$f'(x) = e^{\sin^2(x)}\cos(x).$$

   (c) Om vi sätter exempelvis $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2}$ får vi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ och $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (x-1)) = 0$, vilket visar att vi har de givna asymptoterna.