Lösningsskiss tenta 2025-12-10, Analys del 1

1. (a) Förlänger vi med konjugatuttrycket får vi $\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2-bn}$

$$= \frac{(n^2+an)-(n^2-bn)}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2-b}} = \frac{a+b}{\sqrt{1+a/n}+\sqrt{1-b/n}} \to \frac{a+b}{2}$$

då $n \to \infty$.

(b) Standardgränsvärdena för exponentialfunktionen och sinus ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^x}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{3} \cdot e^x \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \right) = \frac{2}{3} \cdot e^0 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2. Vi ser att funktionen $f(x) = \dfrac{x^2-3}{|x-2|}$ är definierad och kontinuerlig för alla $x \neq 2$, och eftersom $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$ så är $x = 2$ en unik vertikal asymptot. Vi får med polynomdivision att $f(x) = \begin{cases} -x-2-\frac{1}{x-2} & \text{om } x < 2, \\ x+2+\frac{1}{x-2} & \text{om } x > 2, \end{cases}$ så

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - (-x-2)) = \lim_{x\to \infty} (f(x) - (x+2)) = 0$$

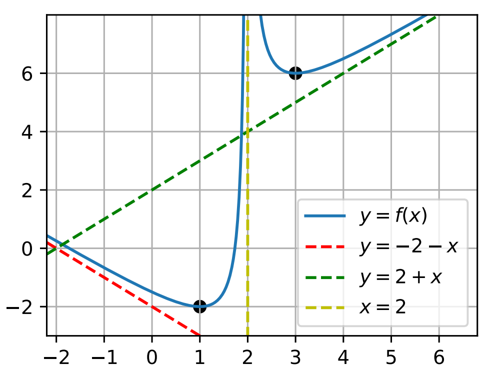
och därmed är $y = -x-2$ och $y = x+2$ sneda asymptoter. Vi får

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{(x-2)^2} & \text{om } x < 2, \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} & \text{om } x > 2. \end{cases}$$

vilket enkelt ger att derivatans nollställen är vid $x = 1$ och $x = 3$. Vi gör en teckentabell:

x		1		2		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	≀	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	≀	$\searrow$	6	$\nearrow$

Vi kan nu skissa grafen:



Vi ser från denna att grafen har ett lokalt minimum $f(3) = 6$, och ett globalt minimum $f(1) = -2$.

3. (a) En linjär substitution ger

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx = \begin{bmatrix} t = x-2 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{t+2}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(t^{1/2} + 2t^{-1/2}\right)\,dt$$
$$= \frac{2}{3}t^{3/2} + 4t^{1/2} + C = t^{1/2}\left(\frac{2t}{3} + 4\right) + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x-2} + C$$

(b) Vi får

$$\int \frac{\arctan(3x)}{1+9x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=\arctan(3x) \\ du=\frac{3}{1+9x^2}\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int u\,du = \frac{u^2}{6} + C = \frac{\arctan(3x)^2}{6} + C,$$

så $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(3x)}{1+9x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{\arctan(3x)^2}{6}\right]_0^N = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{24}.$

4. (a) Låt $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, vilket ger att $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Tangenten till $y = f(x)$ i en punkt $(a, f(a))$ har ekvationen

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{2a}{(1+a^2)^2}(x-a). \qquad (1)$$

Denna tangenter passerar origo $(x,y) = (0,0)$ om

$$0 - \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{2a}{(1+a^2)^2}(0-a) \;\Leftrightarrow\; -a^2(1+a^2) = -2a^2 \;\Leftrightarrow\; a^2(a-1)(a+1) = 0,$$

så för $a = 0, \pm 1$. Insättning av dessa värden på a i ekvation (1) ger de tre tangenterna $y = 0$, $y = x/2$ och $y = -x/2$.

(b) Om vi till exempel sätter in punkten $(x,y) = (0,1)$ i ekvation (1) får vi

$$1 - \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{2a}{(1+a^2)^2}(0-a) \;\Leftrightarrow\; 1 + a^2 = -2a^2,$$

som saknar lösning, och därmed går ingen tangent genom punkten $(0,1)$.

5. (a) Derivatans definition ger att

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0.$$

Funktionen $f(x)$ är därmed derivarbar i punkten $x = 0$, och vi har $f'(0) = 0$.

(b) För $x > 0$ får vi direkt att $f'(x) = 2x$, och för $x < 0$ får vi $f'(x) = -2x$. Tillsammans med resultatet i (a) får vi därmed att $f'(x) = 2|x|$.

(c) Från resultatet i (b) följer direkt att $G(x) = \dfrac{x|x|}{2}$ är en primitiv funktion till $g(x) = |x|$.