Tenta Analys del 1, 18/3/2026

① (a) Nämnaren har nollställena

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Därför är

$$\frac{(x+3)^2(x-2)}{x^2-x-2} = \frac{(x+3)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+3)^2}{x+1}$$

$$\to \frac{25}{3} \quad \text{då } x \to 2.$$

(b)

$$\sqrt{x^2+3x+1} - x = \frac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

$$= \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\to \frac{3}{2} \qquad \text{då } x \to +\infty.$$

(2) Vi visar att $e^x - e^{-x} = y$ har precis en lösning för varje $y \in \mathbb{R}$: Substitution $t = e^x$ ger

$$t - \frac{1}{t} = y \iff t^2 - yt - 1 = 0$$
$$\iff t = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$$

Eftersom $\sqrt{\frac{y^2}{4} + 1} > \frac{y}{2}$ och $t = e^x > 0$

finns endast lösningen

$$e^x = t = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}$$

som leder till

$$x = \ln\left(\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}\right)$$
$$= \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 4}\right) - \ln(2).$$

Därför är f injektiv och

$$f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right) - \ln 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

③ (a) – inga lodräta asymptoter, då g definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

– Asymptoter vid $\pm\infty$:

$$\begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^3-x^2+x \;\big|\; x^2+1 \\ -(x^3 \quad\; +x) \\ \hline \quad -x^2 \\ \;\; -(-x^2-1) \\ \hline \qquad 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x) = x-1+\frac{1}{x^2+1}$$

Då $x-1$ är ett linjärt polynom och

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

följer det att g har asymptoten

$y = x-1$ både då $x\to\pm\infty$.

(b) $$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|\sin h}{h} = \underbrace{|h|}_{\to 0}\,\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

$\to 0$ då $h\to 0$.

Alltså är f deriverbar i $x=0$ med $f'(0)=0$.

④ $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$

(a) $f'(x) = (2x-1)e^{-x} - (x^2 - x - 1)e^{-x} = (-x^2 + 3x)e^{-x}$.

$f'(x) = 0 \iff 0 = -x^2 + 3x = -x(x-3)$

$\iff x = 0$ eller $x = 3$,

$f'(x) = -x(x-3)e^{-x}$

Teckenschema:

x		0		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Lokalt min i $x=0$ med min-värde $f(0) = -1$

Lokalt max i $x=3$ med max-värde $f(3) = 5e^{-3} \approx 0.25$

(b) Då $\underline{x \to -\infty}$ har vi $x^2 - x - 1 \to +\infty$ och $e^{-x} \to +\infty$

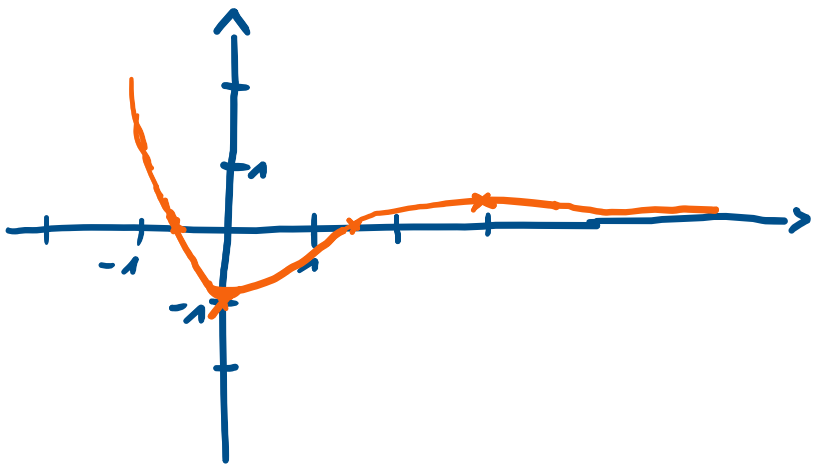
alltså $(x^2 - x - 1)e^{-x} \to +\infty$.

Då $\underline{x \to +\infty}$ har vi, för x tillräckligt stort,

$0 < (x^2 - x - 1)e^{-x} < x^2 e^{-x} \to 0$ (standard-GV)

$\Rightarrow (x^2 - x - 1)e^{-x} \to 0$.

(c)



⑤ (a) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,dx = \int (6x+5)^{\frac{1}{7}}\,dx$

$$= \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{7}}\,dt$$

$t = 6x+5$

$dt = 6dx$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{7}{8}t^{\frac{8}{7}}\right) + C$$

$$= \frac{7}{48}(6x+5)^{\frac{8}{7}} + C$$

där $C \in \mathbb{R}$.

(b) Partiell integration:

$$\int_0^b x e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}x\right]_0^b + \frac{1}{2}\int_0^b e^{-2x}\,dx$$

$u(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v(x) = x$

$u'(x) = e^{-2x}$, $v'(x) = 1$

$$= -\frac{1}{2}be^{-2b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[e^{-2x}\right]_0^b$$

$$= -\frac{1}{2}be^{-2b} - \frac{1}{4}\left(e^{-2b} - 1\right)$$

$\to \frac{1}{4}$ då $b \to \infty$.

$$\Rightarrow \int_0^\infty x e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4}$$