Tenta Analys del 1 15/4/2026

(1)

$$x^2 - \sqrt{x^4-7x^2+3} = \frac{x^4-(x^4-7x^2+3)}{x^2+\sqrt{x^4-7x^2+3}} = \frac{7x^2-3}{x^2+\sqrt{x^4-7x^2+3}}$$

$$= \frac{7-\frac{3}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^4}}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{7}{2}$$

Nollställen täljare och nämnare:

$$x^2-2x-3=0 \iff x = 1\pm\sqrt{4} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$$x^2-7x+12=0 \iff x = \frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-4)(x-3)} = \frac{x+1}{x-4} \xrightarrow{x\to 3} -4$$

② (a) Rationell fkt., nämnaren har inga nollställen ⇒ inga lodräta asymptoter.

Asymptoter vid $\pm\infty$: Polynomdivision

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{2x+1} & \\
\hline
2x^3+x^2+2x & x^2+1 \\
\cline{2-2}
-(2x^3+2x) & \\
\cline{1-1}
x^2 & \\
-(x^2+1) & \\
\cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+x^2+2x}{x^2+1} = 2x+1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Då $\frac{1}{x^2+1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ har kurvan asymptoten $\underline{y=2x+1}$ både då $x \to \pm\infty$.

(b) Tangentens lutning är lika med derivatan.

$$3 \overset{!}{=} f'(x) = \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}} 2x \iff 3x^2-1 = 2x$$

$$\iff x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \iff x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \begin{cases} -1/3 \\ 1 \end{cases}$$

Dock är f odefinierad i $x=-\frac{1}{3}$. Den enda punkten där tangentens lutning är 3 är $\underline{\underline{x=1}}$

③ (a) $x^2-1=0 \iff x=\pm 1$, och vi har följande:

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1-x^2, & -1\le x\le 1, \\ x^2-1, & \text{annars.} \end{cases}$$

g är (potentiellt) icke-deriverbar i $x=\pm 1$, annars

$$g'(x) = \begin{cases} -2x, & -1<x<1, \\ 2x, & \text{annars.} \end{cases}$$

Alltså $g'(x)=0 \iff x=0$. Teckenschema:

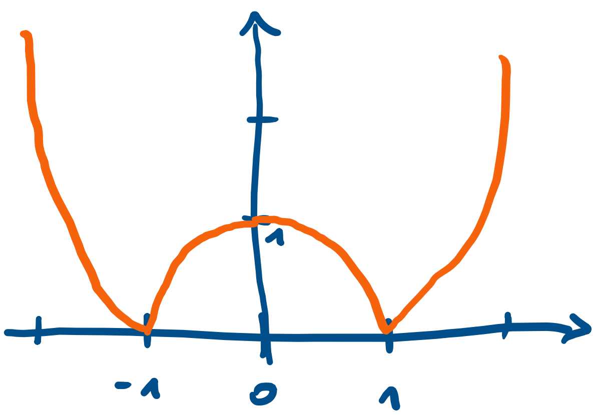
x		-1		0		1	
$g'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

g har lokalt min i $x=\pm 1$, lokalt max i $x=0$.

(b) Andraderivata: $g''(x) = \begin{cases} -2, & -1<x<1, \\ 2, & \text{annars.} \end{cases}$

$\Rightarrow g$ konvex på både $(-\infty,-1)$ och $(1,\infty)$, konkav på $(-1,1)$.

(c)



④ (a) Part. int. $u(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x)$ $v(x) = x$

$u'(x) = \sin(5x)$ $v'(x) = 1$

$$\int_0^{\pi} x\sin(5x)\,dx = \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5\pi)\pi - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right)\cdot 1\,dx$$

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\left[\sin(5x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{5}$$

(b) Substitution $t = \arctan x$, $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\arctan x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C$$

$$= \ln|\arctan x| + C$$

⑤ (a) $f(x) = \sqrt{p(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{p(x+h)} - \sqrt{p(x)}}{h} = \frac{p(x+h)-p(x)}{h\left(\sqrt{p(x+h)} + \sqrt{p(x)}\right)}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \quad p'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{p(x)}}.$$

(p kontinuerlig, $\sqrt{\ }$ – " –)

$\rightarrow$ f deriverbar, $f'(x) = \dfrac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}$

(b) p konvex, 2x deriverbar $\Rightarrow$ $p''(x) \geq 0 \ \forall x.$

Vi har

$$g'(x) = 2p(x)p'(x),$$

$$g''(x) = \underbrace{2(p'(x))^2}_{\geq 0} + 2\underbrace{p(x)}_{>0}\underbrace{p''(x)}_{\geq 0} \geq 0 \ \forall x.$$

$\Rightarrow$ g konvex.