

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. **Lycka till!**

1. Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar: (6p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{e^{3x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + 5x^2 - 2} - x^2 \right).$$

Endast metoder från Analys del 1 får användas. I synnerhet är varken l'Hopitals regel eller Maclaurinutveckling tillåtna.

2. (a) Bestäm samtliga asymptoter till grafen av (3p)

$$f(x) = \frac{\sin(x) + 5x^2}{x}.$$

- (b) Visa att funktionen (3p)

$$g(x) = (e^x + x)^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

är strängt växande.

3. Låt $f(x) = (x^4 - x^2 - 1)e^{-x^2}$.

- (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter av f . (3p)

- (b) Undersök funktionens beteende när $x \rightarrow \pm\infty$. (2p)

- (c) Skissera grafen av f . (Konvexitet behöver inte undersökas.) (1p)

Tips: $e^{-3} \approx 0,05$.

4. (a) Bestäm (3p)

$$\int s \ln(s) \, ds.$$

- (b) Undersök huruvida den generaliserade integralen (3p)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

konvergerar och bestäm i förekommande fall dess värde.

5. (a) Beräkna tangenten till grafen av $f(x) = x^{\frac{2}{x}}$ i punkten $(1, 1)$. (3p)

- (b) Antag att den deriverbara funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är jämn, dvs. (3p)

$$g(-x) = g(x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}.$$

Visa utifrån derivatans definition att även $h(x) = xg'(x)$ är jämn.