

Tenta Analys del 1

14/8/2026

①

$$\frac{\sin(4x)}{e^{3x} - 1} = \frac{4}{3} \frac{\sin(4x)}{4x} \frac{3x}{e^{3x} - 1} \rightarrow \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

Standard: $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ och $\frac{e^t - 1}{t} \rightarrow 1$ då $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 + 5x^2 - 2} - x^2 &= \frac{x^4 + 5x^2 - 2 - x^4}{\sqrt{x^4 + 5x^2 - 2} + x^2} = \frac{5x^2 - 2}{\sqrt{x^4 + 5x^2 - 2} + x^2} \\ &= \frac{5 - \frac{2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2} \end{aligned}$$

② (a) Vertikala asymptoter: enda kandidat $x=0$,
 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 5x \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$.

$\leadsto$ Ingen vertikal asymptot.

Asymptoter vid $\pm \infty$:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{x} + \underline{5x}$$

och $\sin(x) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \pm \infty$, då $\frac{1}{x} \rightarrow 0$
samt att $\sin(x)$ är begränsad ($|\sin(x)| \leq 1 \forall x$).

$\leadsto$ Asymptot både då $x \rightarrow \pm \infty$ är

$$\underline{y = 5x}.$$

(b) Vi undersöker monoton; med hjälp av derivatan:

$$g'(x) = 3 \underbrace{(e^x + x)^2}_{\geq 0} \underbrace{(e^x + 1)}_{> 0} \geq 0$$

$\leadsto$ g växande.

Derivatan blir noll om och endast om $e^x + x = 0$,
ekvivalent $e^x = -x$. Då e^x strängt växande och $-x$
strängt avtagande har deras grafer (högst) en
skärningspunkt, alltså $e^x + x = 0$ högst en lösning.

$\leadsto$ $g'(x) > 0$ i alla förutom högst ett $x \in \mathbb{R}$

$\leadsto$ g strängt växande.

③ (a) f deriverbar på hela $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (4x^3 - 2x) e^{-x^2} + (x^4 - x^2 - 1) e^{-x^2} \cdot (-2x) \\ = (-2x^5 + 6x^3) e^{-x^2} = -2x^3(x^2 - 3) e^{-x^2}$$

Derivatans nollställen: $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3}$.

Teckentabell:

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$

$\leadsto$ lokalt max. i $x = \pm\sqrt{3}$, lokalt min i $x = 0$.

(b) Då $x \rightarrow \pm\infty$ gäller

$$f(x) = \frac{x^4}{e^{x^2}} - \frac{x^2}{e^{x^2}} - \frac{1}{e^{x^2}} \rightarrow 0$$

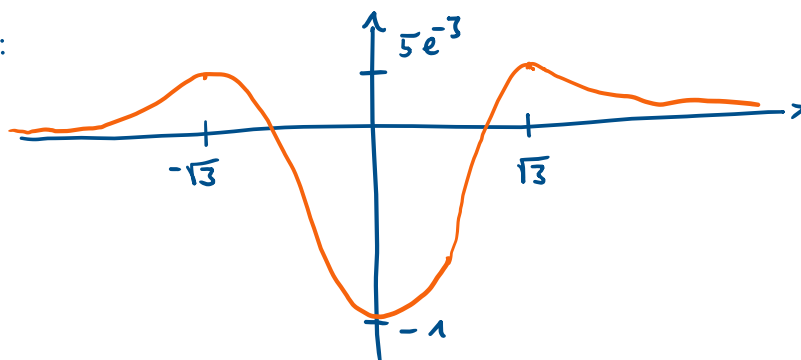
(standard-GV $\frac{x^a}{a^x} \rightarrow 0$)

(c) Värdetabell:

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$f(x)$	$5e^{-3}$	-1	$5e^{-3}$

, $5e^{-3} \approx 0,25$

Graf:



④ (a) Partiell integration:

$$\begin{aligned}\int s \ln(s) ds &= - \int \frac{1}{2} s^2 \cdot \frac{1}{s} ds + \frac{1}{2} s^2 \ln(s) \\&= - \frac{1}{2} \int s ds + \frac{1}{2} s^2 \ln(s) \\&= \frac{1}{2} \left(- \frac{s^2}{2} + s^2 \ln(s) + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) Integralen är generaliserad vid både 0 och ∞ .

$$\int \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{-3t} dt = -\frac{2}{3} e^{-3t} + C = -\frac{2}{3} e^{-3\sqrt{x}} + C.$$

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{x} \\dt &= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{2}{3} e^{-3\sqrt{x}} \right]_a^1 \\&= -\frac{2}{3} e^{-3} + \frac{2}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{3} e^{-3\sqrt{x}} \right]_1^b \\&= 0 + \frac{2}{3} e^{-3}.\end{aligned}$$

$\leadsto$ Integralen konvergerar med värde

$$\int_0^\infty \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3} e^{-3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} e^{-3} = \frac{2}{3}.$$

$$(5) \quad (a) \quad f(x) = x^{\frac{2}{x}} = e^{\frac{2}{x} \ln(x)}, \quad f'(x) = 2e^{\frac{2}{x} \ln(x)} \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2}$$

$$\leadsto f'(1) = 2$$

$$\text{Tangent i } (1,1): \quad y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1.$$

$$(b) \quad h(-x) = -x g'(-x) = -x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-x+h) - g(-x)}{h}$$

$$= -x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x-h) - g(x)}{h} = x \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(x+k) - g(x)}{k}$$

$$= x g'(x)$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.