

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Bestäm antalet reella lösningar till ekvationen  $4x \ln x + 1 = 0$ . (5p)

2. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{4-x}$ , där  $1 \leq x \leq 3$ . Beräkna volymen av den kropp som uppstår när grafen till  $f$  roteras runt  $x$ -axeln. (5p)

3. Bestäm minimum och maximum av funktionen (5p)

$$f(x, y) = xy e^{x^2+y^2}$$

på det område i planet som begränsas av linjerna  $x = 0$ ,  $y = 0$  och  $y = 2 - x$ .

4. (a) Byt integrationsordning i den itererade integralen (2p)

$$\int_1^7 \left( \int_0^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy \right) dx,$$

där  $f$  är en kontinuerlig funktion.

(b) Beräkna (3p)

$$\iint_D x(x^2 + y^2)^3 dx dy,$$

där  $D$  är den del av cirkeln  $x^2 + y^2 \leq 4$  där  $x \geq 0$ .

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen (5p)

$$y'' - 7y' + 12y = e^{3x}.$$

6. Antag att  $f$  är en fyra gånger deriverbar funktion i en omgivning av  $x = 0$  och att den fjärde derivatan är kontinuerlig.

(a) Ange Maclaurinpolynomet av grad 3 till  $f$  samt ange den tillhörande resttermen på Lagranges eller svag form. (1p)

(b) Antag nu dessutom att  $f(0) \neq 0$  samt  $f(0)f''(0) - f'(0)^2 = 0$ . Bestäm en reell konstant  $\alpha$  (beroende på värdena av  $f$  och dess derivator i  $x = 0$ ) sådan att gränsvärdet (4p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x) + f'(x)}{x^2}$$

är ändligt.