Matematik I – Analys del 2

Lösningsskiss till tentamen 2024-01-12

1. Betrakta $f(x) = 4x \ln x + 1$ för $x > 0$. Då $f'(x) = 4 \ln x + 4$, vilket blir noll om och endast om $x = e^{-1}$. Teckentabell:

x	0		e^{-1}	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Funktionen har dessutom gränsvärdena

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dessutom är $f(e^{-1}) = -4e^{-1} + 1 < 0$. Alltihop ger en enkel skiss av funktionsgrafen att f har två positiva nollställen, dvs. ekvationen har två reella lösningar.

2. Vi ska integrera $f(x)^2 = \frac{x-1}{(4-x)^2}$. Partialbråksuppdelning:

$$\frac{x-1}{(4-x)^2} = \frac{A}{4-x} + \frac{B}{(4-x)^2}$$

ger med handpåläggning (dvs. multiplikation med $(4-x)^2$ och gränsvärdesbetraktning $x \to 4$) att $B = 3$, och sedan följer det vidare att $A = -1$. Rotationsvolymen V ges därför av

$$\begin{aligned} V = \pi \int_1^3 f(x)^2 \mathrm{d}x &= \pi \int_1^3 \left(-\frac{1}{4-x} + \frac{3}{(4-x)^2} \right) \mathrm{d}x = \pi \left[\ln(4-x) + \frac{3}{4-x} \right]_1^3 \\ &= \pi \left(2 - \ln 3 \right). \end{aligned}$$

3. Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1+2x^2)e^{x^2+y^2} \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1+2y^2)e^{x^2+y^2}.$$

Den enda lösningen är $(x, y) = (0, 0)$ (ligger på områdets rand).

Randen består av tre delar. Där $x = 0$ eller $y = 0$ är f konstant lika med noll. Det återstår att undersöka biten där $y = 2 - x$ och $0 \le x \le 2$: låt

$$g(x) := f(x, 2-x) = (2x - x^2)e^{x^2+(2-x)^2} = (2x - x^2)e^{2x^2-4x+4}.$$

Dess derivata är

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2 - 2x)e^{2x^2-4x+4} + (2x - x^2)(4x - 4)e^{2x^2-4x+4} \\ &= 4(1-x)\left(x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) e^{2x^2-4x+4}. \end{aligned}$$

Den har nollställen i $x = 1$ samt $x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$. Därför är även $(1, 1)$, $(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{1}{2}})$ och $(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{1}{2}})$ möjliga extrempunkter.

Jämförelse: $f(0,0) = f(0,2) = f(2,0) = 0$,

$$f(1,1) = e^2, \qquad f\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{e^3}{2}.$$

Största värdet är alltså $e^3/2$ och minsta värdet är 0.

4. (a) En skiss ger

$$\int_1^7 \int_0^{1/x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{1/7} \int_1^7 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{1/7}^1 \int_1^{1/y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b) Med polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ har vi

$$\begin{aligned}\iint_D x(x^2+y^2)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r\cos\theta r^6 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^2 r^8\mathrm{d}r \\ &= 2\left[\frac{r^9}{9}\right]_0^2 = \frac{1024}{9}.\end{aligned}$$

5. Den homogena DE:n $y'' - 7y' + 12y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 7r + 12 = 0$ med lösningar $r = 3$ samt $r = 4$. Därför ges den allmänna lösningen till den homogena DE:n av

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$$

med konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

För att lösa den inhomogena DE:n väljer vi ansatsen

$$y_{\mathrm{p}}(x) = Axe^{3x}$$

på grund av resonansfall (e^{3x} löser den homogena DE:n). Derivator:

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{p}}'(x) &= A\,(1+3x)\,e^{3x}, \\ y_{\mathrm{p}}''(x) &= A\,(6+9x)\,e^{3x}.\end{aligned}$$

Insättning i DE:n ger

$$e^{3x} = -Ae^{3x},$$

och jämförelse av koefficienterna leder till $A = -1$. Vi får alltså

$$y_{\mathrm{p}}(x) = -xe^{3x},$$

och den allmänna lösningen är

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} - xe^{3x}.$$

6. (a) Det finns en funktion B som är begränsad i en omgivning av $x = 0$ sådan att

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + B(x)x^4.$$

(Restterm på svag form.)

(b) Under uppgiftens förutsättningar existerar funktioner $B, \widetilde{B}$ som är begränsade in en omgivning av $x = 0$ sådana att

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + B(x)x^3, \\ f'(x) &= f'(0) + f''(0)x + \frac{f'''(0)}{2}x^2 + \widetilde{B}(x)x^3.\end{aligned}$$

Därför

$$\frac{\alpha f(x) + f'(x)}{x^2} = \frac{\alpha f(0) + f'(0) + (\alpha f'(0) + f''(0))x + (\alpha f''(0) + f'''(0))\frac{x^2}{2} + (B(x) + \widetilde{B}(x))x^3}{x^2},$$

och gränsvärdet då $x \to 0$ existerar om och endast om både

$$\alpha f(0) + f'(0) = 0 \quad \text{och} \quad \alpha f'(0) + f''(0) = 0.$$

Om $f'(0) = 0$, så ger den första ekvationen $\alpha = 0$, och i detta fall ger $f(0)f''(0) - f'(0)^2 = 0$ att även $f''(0) = 0$, $\alpha = 0$ uppfyller alltså även den andra ekvationen.

Låt oss nu betrakta fallet $f'(0) \neq 0$. Den första ekvationen löses då av $\alpha_1 = -\frac{f'(0)}{f(0)}$, och den andra av $\alpha_2 = -\frac{f''(0)}{f'(0)}$. Enligt förutsättningen $f(0)f''(0) - f'(0)^2 = 0$ är $\alpha_1 = \alpha_2$ och ekvationssystemet har en entydig lösning,

$$\alpha = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -\frac{f''(0)}{f'(0)}.$$