Matematik I – Analys del 2

Lösningsskiss till tentamen 2024-02-21

1. Funktionen är kontinuerlig på $[0, 2]$, antar alltså sitt största och minsta värde. Vi ser från definitionen av f att $f(x) \geq 0$ gäller för alla x, och att $f(1) = 0$. Därför är minsta värdet 0. Dessutom gäller

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x^2}, & x \leq 1, \\ \frac{x^2-1}{1+x^2}, & x \geq 1, \end{cases}$$

och därför

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & x < 1, \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Vi kan genast läsa av följande teckentabell.

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{5}$

Största värdet på intervallet $[0, 2]$ är alltså 1.

2. Maclaurinpolynomet kan bestämmas med hjälp av standardutvecklingar. Då vi dock ändå kommer behöva derivatorna av f, börjar vi med att räkna ut dem:

$$f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}, \qquad f''(x) = (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad f'''(x) = (3x + x^3)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Därför blir

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Resttermen blir då

$$R_3(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}x^3 = \frac{(3\xi + \xi^3)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{6}x^3$$

för något ξ mellan 0 och x. Om $|x| \leq 0,1$, så är även $|\xi| \leq 0,1$ och vi kan få fram feluppskattningen

$$|R_3(x)| \leq \frac{(3|\xi| + |\xi|^3)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{6}|x|^3 \leq 3\frac{3 + 0,1^2}{6}0,1^4 \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4},$$

då vi har använt $e^{\frac{\xi^2}{2}} \leq e^1 < 3$.

3. Betrakta funktionen $f(x) = (x + 1)e^{-x}$. Den är deriverbar på hela $\mathbb{R}$ och

$$f'(x) = -xe^{-x}.$$

Särskilt är $f'(x) < 0$ för alla $x > 0$ och själva f avtagande och positiv där. Därför har vi integraluppskattningen

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{e^k} \leq \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to\infty} \int_1^B (x + 1)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Integralen kan beräknas med hjälp av partiell integration. Alternativt ger beräkningen ovan att

$$\int_1^B (x+1)e^{-x}\mathrm{d}x = -\int_1^B \left(-xe^{-x}\right)\mathrm{d}x + \int_1^B e^{-x}\mathrm{d}x = -\left[(x+1)e^{-x}\right]_1^B - \left[e^{-x}\right]_1^B$$
$$= \frac{2}{e} - \frac{B+1}{e^B} + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^B} \to \frac{3}{e}$$

då $B \to \infty$. Sammanlagt får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{e^k} \leq \frac{2}{e} + \frac{3}{e} = \frac{5}{e}.$$

4. Vi väljer polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, där $2 \leq r \leq 3$ och $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Då får vi

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta \sin\theta r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_2^3 r^3\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4}\left(3^4 - 2^4\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{65}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

Integralen med avseende på θ kan t.ex. beräknas genom att inse att $\sin\theta\cos\theta$ är derivatan till $g(\theta) = \frac{1}{2}\sin^2\theta$. Detta ger

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{65}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{65}{4}\left(g(\pi/2) - g(0)\right) = \frac{65}{8}.$$

5. Detta är en DE med separabla variabler. Vi kann se genast att vänsterledet liknar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2$. Således är DE:n ekvivalent med

$$y^2 = \int \frac{1}{x^2-4}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

(partialbråksuppdelning genom handpåläggning). Vi kan redan nu bestämma konstanten, då vi vill ha $y(1) = -2$ och därför

$$4 = y^2(1) = -\frac{1}{4}\ln 3 + C,$$

vilket ger $C = 4 + \frac{1}{4}\ln 3$. Vidare får vi

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + 4 + \frac{1}{4}\ln 3} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\ln\frac{|x-2|}{|x+2|} + 4 + \frac{1}{4}\ln 3}.$$

Men för att begynnelsevillkoret $y(1) = -2$ kan gälla, så måste tecknet väljas som minus, och lösningen blir

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{4}\ln\frac{|x-2|}{|x+2|} + 4 + \frac{1}{4}\ln 3}.$$

6. (a) (x_0, y_0) är en lokal minimipunkt till f om och endast om $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ gäller för alla (x,y) i en omgivning av (x_0,y_0).

   (b) Vi beräknar först de partiella derivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x-2)(1+y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(x^2 + 2y^2 - 2x + 1\right).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ försvinner uppenbarligen endast om $x = 1$. Stoppar vi in detta i ekvationen $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, så ger detta $4y^3 = 0$ och därför $y = 0$ som enda lösning. Den enda stationära punkten är alltså $(1, 0)$.

Att detta är en lokal (t.o.m. global) minimipunkt följer då med kvadratkomplettering:

$$f(x, y) = \left((x-1)^2 + y^2 - 1\right)(y^2 + 1) \geq y^4 - 1 \geq -1 = f(1, 0)$$

gäller för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.