MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Analys del 2, Matematik I, 5 hp
Avd. Matematik	den 27 augusti 2024
Examinator: Jonathan Rohleder	

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Beräkna Maclaurinpolynomet p_3 av grad 3 till funktionen f som ges av (6p)

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x}).$$

Visa dessutom att approximationsfelet som fås när $f(x)$ ersätts med $p_3(x)$ är högst $\frac{1}{8} \cdot 10^{-8}$ för $0 \leq x \leq 0{,}01$.

2. Bestäm alla primitiva funktioner till (6p)

$$f(x) = \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}.$$

3. Finn alla stationära punkter till funktionen (4p)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1.$$

Har denna funktion ett största värde på planet?

4. Beräkna (4p)

$$\iint_D \frac{x}{1+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

där $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

5. Bestäm den lösning till differentialekvationen (6p)

$$(1+x)y' - y^2 - 1 = 0$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

6. (a) Ange definitionen av konvergens för en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, där $a_1, a_2, \ldots$ är reella tal. (1p)

(b) Låt $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ vara en positiv, avtagande, deriverbar funktion sådan att $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Visa att serien (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^2(k)$$

konvergerar.