Matematik I – Analys del 2

Lösningsskiss till tentamen 2024-08-27

1. Funktionen f har derivatorna

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3}{(1+x)^4}.$$

Detta ger Maclaurinpolynomet

$$p_3(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Resttermen är

$$R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 = -\frac{3}{24(1+\xi)^4}x^4$$

där ξ är ett tal mellan 0 och x. För $0 \leq x \leq 0{,}01$ har vi $0 \leq \xi \leq 0{,}01$, vilket ger $1+\xi \geq 1$. Därför ges felet av

$$|R_4(x)| = \frac{1}{8}\frac{1}{(1+\xi)^4}x^4 \leq \frac{1}{8}0{,}01^4 = \frac{1}{8}\cdot 10^{-8}.$$

2. Vi ska använda oss av partialbråksuppdelning och har

$$f(x) = \frac{5x-8}{x(x^2-4x+4)} = \frac{5x-8}{x(x-2)^2}.$$

På grund av det dubbla nollstället 2 i nämnaren väljer vi en ansats

$$f(x) = \frac{5x-8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}. \tag{1}$$

Multiplicerar vi ekvationen (1) med x och tittar på gränsvärdet då $x \to 0$, så får vi ("handpåläggning") $A = -8/4 = -2$. Om vi multiplicerar (1) med $x(x-2)^2$, så får vi

$$5x - 8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx,$$

och övergång till gränsvärdet då $x \to 2$ ger $2 = 2C$, dvs. $C = 1$. Alltså har (1), multiplicerat med $x-2$, formen

$$\frac{5x-8}{x(x-2)} = -\frac{2}{x}(x-2) + B + \frac{1}{x-2},$$

och omformning ger

$$B = \frac{5x-8}{x(x-2)} + \frac{2}{x}(x-2) - \frac{1}{x-2} = \frac{5x-8+2(x-2)^2-x}{x(x-2)} = \frac{(4+2(x-2))(x-2)}{x(x-2)} = 2.$$

Vi får därför

$$\int f(x)\mathrm{d}x = -2\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x + 2\int\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x + \int\frac{1}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = -2\ln|x| + 2\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + D,$$

där $D \in \mathbb{R}$.

3. De partiella derivatorna till f är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy - 6x = 6x(y-1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 12y^2 - 24y.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ blir noll när $x = 0$ eller $y = 1$. Insättning av $x = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ ger $12y(y-2) = 0$ och har lösningarna $y = 0$ och $y = 2$. Å andra sidan leder $y = 1$ till $3x^2 - 12 = 0$, vilket har lösningarna $x = \pm 2$. Sammanlagt har vi fyra stationära punkter,

$$(0,0), \quad (0,2), \quad (-2,1), \quad (2,1).$$

Funktionen f har inget största värde. Ett möjligt argument för detta ser så här ut: Funktionen är deriverbar överallt. Om den har ett största värde, så måste detta värde antas i en av de stationära punkterna. Vi beräknar

$$f(0,0) = 1, \quad f(0,2) = -15, \quad f(-2,1) = f(2,1) = -7.$$

Men t.ex. $f(0,10) = 4000 - 1200 + 1 = 2799$ är (mycket) större än alla dessa värden. Alternativt kan t.ex. visas att $f(x,x)$ går mot $+\infty$ då $x \to +\infty$.

4. Området D beskrivs i polära koordinater av $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, där $1 \le r \le 2$ och $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Alltså

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{1+(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{r\cos\theta}{1+(r^2)^{\frac{3}{2}}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \mathrm{d}\theta \int_1^2 \frac{r^2}{1+r^3}\mathrm{d}r \\
&= (\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)) \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3r^2}{1+r^3}\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\left[\ln|1+r^3|\right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3}\left(\ln(9) - \ln(2)\right).
\end{aligned}$$

5. Denna DE har separabla variabler, då den kan skrivas

$$y' = \frac{y^2+1}{1+x}.$$

Högerledet har inga nollställen, vi får alltså inga konstanta lösningar, och DE:n är ekvivalent med

$$\int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,$$

vilket ger

$$\arctan(y) = \ln|1+x| + C.$$

Sålänge som högerledet ligger mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$ (vilket stämmer för x nära noll och lämplig konstant C), så följer

$$y(x) = \tan\left(\ln|1+x| + C\right).$$

Vi bestämmer konstanten C: $1 = \tan(C)$ ger $C = \pi/4$ (som ligger i rätt intervall). Alltså har DE:n den entydiga lösningen

$$y(x) = \tan\left(\ln|1+x| + \frac{\pi}{4}\right).$$

6. (a) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sägs att konvergera mot $s \in \mathbb{R}$ om talföljden

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergerar mot s då $n \to \infty$, dvs. $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

(b) Då f är deriverbar gäller samma sak för funktionen f^2, och $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x) \leq 0$ gäller för alla $x \in (1, \infty)$ eftersom $f(x) > 0$ och $f'(x) \leq 0$ för alla x. Särskilt är f^2 avtagande (och självklart, positiv). Då f är avtagande och $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$ följer att $f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. (Annars skulle f ha ett positivt gränsvärde $G := \lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ och $\int_1^b f(x)\mathrm{d}x \geq G(b-1)$ skulle följa, vilket går mot $+\infty$ då $b \to +\infty$, vilket motsäger integrerbarhetsvillkoret.) Särskilt gäller för alla tillräckligt stora x, säg $x > X$, att $f(x) < 1$ och därför $f^2(x) < f(x)$. Därför gäller

$$\int_X^b f^2(x)\mathrm{d}x < \int_X^b f(x)\mathrm{d}x$$

för alla $b > X$, och $\int_1^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$ följer. Enligt Cauchys integralkriterium konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} f^2(k)$.