MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning i
Analys del 2, Matematik I, 5 hp
den 17 januari 2025

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. Finn alla primitiva funktioner till (6p)
$$f(x) = \frac{5x^2 + 5x + 10}{x^3 + x^2 - 2}.$$

2. Bestäm Maclaurinpolynomen p_1 och p_2 av grad 1 respektive 2 för funktionen (6p)
$$f(x) = \frac{1}{2 + e^{3x}}.$$
Ange dessutom en övre uppskattning för felet som uppstår när $f(0{,}1)$ ersätts med $p_1(0{,}1)$. Tips: $e^{0{,}3} < \frac{3}{2}$.

3. (a) Beräkna dubbelintegralen $\iint_{D_1} x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där D_1 är det begränsade område i planet som ligger mellan graferna till $g(x) = x^2 - 1$ och $h(x) = x + 1$. (3p)

   (b) Beräkna (3p)
$$\iint_{D_2} x e^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
där $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le x^2 + y^2 \le 4 \text{ och } x \ge 0\}$.

4. Bestäm den lösning y till differentialekvationen (6p)
$$y' = \frac{(x + 29)y}{x^2 + 3x - 28}$$
som uppfyller begynnelsevillkoret $y(5) = -\frac{1}{12}$.

5. (a) Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vara en funktion i två variabler och låt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Ange definitionen för att f är partiellt deriverbar i (x_0, y_0). (1p)

   (b) Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ges av (2p)
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 0 \text{ eller } y = 0, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$
Undersök huruvida f är partiellt deriverbar i $(0, 0)$.

   (c) Bestäm maximum och minimum för funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ där (3p)
$$f(x, y) = (2 - x^2 - y^2)x \quad \text{och} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$