Tentamen Analys 2 17/01/2025

1.1 Partialbråksuppdelning, först faktorisera nämnaren:
$x = 1$ är ett nollställe. Polynomdivision:

$$
\left.\begin{array}{rl}
\underline{x^2 + 2x + 2} & \\
x^3 + x^2 \qquad -2 & \big| \, \underline{x-1} \\
-\underline{(x^3 - x^2 \qquad\quad)} & \\
2x^2 \qquad -2 & \\
-\underline{(2x^2 - 2x \qquad)} & \\
2x - 2 & \\
-\underline{(2x - 2)} & \\
0 &
\end{array}\right\} \Rightarrow \; x^3 + x^2 - 2 = (x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{Reellt irreducibelt}}
$$

Ansats:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 5x + 10}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+2x+2} \qquad (*)$$

Handpåläggning: $A = \frac{20}{5} = 4$

Stoppa in $x = 0$ i $(*)$:

$$\frac{10}{-2} = \frac{4}{-1} + \frac{C}{2} \iff C = -2$$

Stoppa in $x = -1$ i $(*)$:

$$\frac{10}{-2} = \frac{4}{-2} + \frac{-B-2}{1} \iff B = 1$$

Integration:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{4}{x-1}\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx,$$

där

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2} = \int \frac{x-2}{(x+1)^2+1}\,dx \underset{\substack{t = x+1 \\ dt = dx}}{=} \int \frac{t-3}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 3\arctan(t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 3\arctan(x+1) + C$$

Sammanlagt:

$$\int f(x)\,dx = 4\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 3\arctan(x+1) + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$.

2.1 $f(x) = \dfrac{1}{2+e^{3x}}$, $f'(x) = -\dfrac{3e^{3x}}{(2+e^{3x})^2}$,

$$f''(x) = -\frac{9e^{3x}(2+e^{3x})^2 - 3e^{3x}\cdot 2(2+e^{3x})\,3e^{3x}}{(2+e^{3x})^4} = -9e^{3x}\frac{2+e^{3x}-2e^{3x}}{(2+e^{3x})^3}$$

$$= 9e^{3x}\frac{e^{3x}-2}{(2+e^{3x})^3}$$

Särskilt, $f(0) = \frac{1}{3}$, $f'(0) = -\frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $p_1(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$, $\quad p_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}x^2$

Feluppskattning: För något ξ med $0 \le \xi \le 0{,}1$ gäller

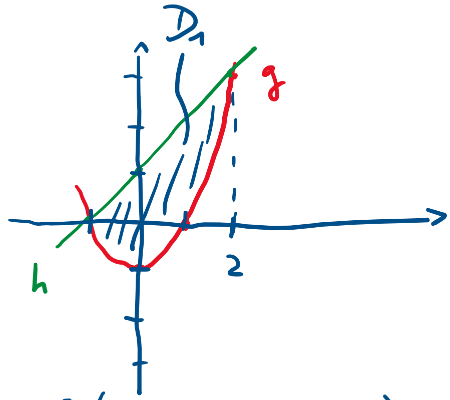
$$|R_2(0{,}1)| = 9e^{3\xi}\frac{|e^{3\xi}-2|}{2(2+e^{3\xi})^3}\cdot 0{,}1^2 = 9e^{3\xi}\frac{2-e^{3\xi}}{2(2+e^{3\xi})^3}\cdot 10^{-2}$$

$e^{3\xi} \le e^{0{,}3} < 2$

$$\le 9\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot 10^{-2} = \frac{1}{4}\cdot 10^{-2}$$

$1 = e^0 \le e^{3\xi} \le e^{0{,}3} \le \frac{3}{2}$

3.| (a) Skiss:



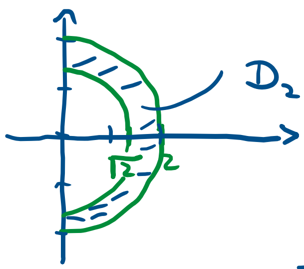
$$\iint_{D_1} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2-1}^{x+1} x\,dy\right)dx = \int_{-1}^{2}\left[xy\right]_{y=x^2-1}^{x+1}dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(x^2+x-(x^3-x)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left(-x^3+x^2+2x\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{2} = \left(-4+\frac{8}{3}+4\right)-\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= \frac{9}{3}+\frac{1}{4}-1 = 2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

(b) Skiss:



Polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos(\vartheta) \\ y = r\sin(\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \sqrt{2} \le r \le 2 \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\iint_{D_2} x\,e^{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\sqrt{2}}^{2} r\cos(\vartheta)\,e^{r^3}\,r\,dr\right)d\vartheta$$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\vartheta)\,d\vartheta\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\int_{\sqrt{2}}^{2}3r^2e^{r^3}dr\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin(\vartheta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[e^{r^3}\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(e^8-e^{\sqrt{2}^3}\right)$$

4.1 DE:n är separabel, och $y=0$ är nollställe till HL
$\Rightarrow$ $y(t)=0$ är en konstant lösning.

Annars:
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x+29}{x^2+3x-28}\,dx$$

Integral på HL: Partialbråksuppdelning.
Nollställen nämnare: $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+28} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}} = \begin{cases} -7 \\ 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x+29}{x^2+3x-28} = \frac{x+29}{(x+7)(x-4)} = \frac{-2}{x+7} + \frac{3}{x-4}$$

Sammanlagt:
$$\ln|y| = -2\ln|x+7| + 3\ln|x-4| + C$$
$$= \ln|x-4|^3 - \ln|x+7|^2 + C = \ln\frac{|x-4|^3}{|x+7|^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \pm \frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}\, e^C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Begynnelsevillkor:
$$-\frac{1}{12} \overset{!}{=} y(5) = \pm \frac{1}{12^2}\, e^C$$
ger tecknet minus och $e^C = 12$.
$$\Rightarrow \quad y(x) = -12\,\frac{(x-4)^3}{(x+7)^2}$$

5. (a) f partiellt deriverbar i (x_0, y_0) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} g(x) := f(x, y_0) \text{ är deriverbar i } x = x_0 \text{ samt} \\ h(y) := f(x_0, y) \text{ är deriverbar i } y = y_0. \end{cases}$$

(b) I $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$g(x) = f(x, 0) = 1$ konstant och

$h(y) = f(0, y) = 1$ — " —

alltså både g och h deriverbara i 0.

$\Rightarrow$ f partiellt deriverbar i $(0, 0)$.

(c) f är partiellt deriverbar överallt i det inre av D. På randen gäller $x^2 + y^2 = 2$ och därför

$f(x, y) = 0$ konstant.

Stationära inre punkter:

$$f(x, y) = 2x - x^3 - y^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 - 3x^2 - y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xy$$

Ska alltså lösa

$$\begin{cases} \text{I} & 0 = 2 - 3x^2 - y^2 \\ \text{II} & 0 = -2xy \end{cases}$$

II: $x = 0$ eller $y = 0$.

$\underline{x = 0}$; I: $y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$

$\underline{y = 0}$; I: $3x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ 4 stationära punkter: $(0, \pm\sqrt{2})$, $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$. (Alla i D)

$f(0, \pm\sqrt{2}) = 0$, $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = -(2 - \frac{2}{3})\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$f(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow$ maximum är $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, minimum $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.