MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning i
Analys del 2, Matematik I, 5 hp
den 28 februari 2025

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

1. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet p_2 av grad 2 för funktionen (3p)

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x+2}.$$

(b) Beräkna gränsvärdet (3p)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x^3+2x^2} - \frac{1}{2x}\right)$$

ifall det existerar.

2. Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}$ på det område i planet som beskrivs av $x^2+y^2 \le \frac{1}{4}$. (6p)

3. (a) Byt integrationsordning i den itererade integralen (2p)

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

där f är en kontinuerlig funktion.

(b) Beräkna (4p)

$$\iint_D \frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

där $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 4 \,\text{och}\, y \le x\right\}$.

4. Finn alla lösningar till differentialekvationen (6p)

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}.$$

5. (a) Ange definitionen för konvergens av en serie av reella tal. (1p)

(b) Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, följer det då att även serien $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ konvergerar? Ange ett bevis respektive ett motexempel. (2p)

(c) Undersök huruvida serien $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k}$ konvergerar. (3p)