Analys del 2, tenta 2025/02/28

1 (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(x+2) - \sin(x)}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-\sin(x)\,(x+2) + \cos(x) - \cos(x)\right)(x+2)^2 - \left[\cos(x)(x+2) - \sin(x)\right]2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-\sin(x)\,(x+2)^2 + 2\sin(x) - 2\cos(x)(x+2)}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$$

(b) Från (a) vet vi att $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + B(x)\,x^3$ för en funktion B som är begränsad nära $x = 0$. Dessutom

$$\frac{\sin(x)}{x^3+2x^2} = \frac{1}{x^2}\,\frac{\sin(x)}{x+2} = \frac{1}{x^2}f(x)$$

och därför

$$\frac{\sin(x)}{x^3+2x^2} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{4} + B(x)\,x^3\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \underbrace{B(x)\,x}_{\to 0 \text{ då } x \to 0,\ \text{då } B \text{ begränsad}} \longrightarrow -\frac{1}{4} \quad \text{då } x \to 0.$$

2| Stationära punkter för $f(x,y) = \dfrac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \overset{!}{=} \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{(x^2+y^2+2x^2)(1-x^2-y^2) - x(x^2+y^2)(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2} \\ \dfrac{2xy\,(1-x^2-y^2) - x(x^2+y^2)(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Den andra ekvationen ger

$$0 = 2xy\,(1-x^2-y^2+x^2+y^2) = 2xy,$$

vilket är uppfylld om $x=0$, $y=0$

$x=0$ i första ekvationen:

$$0 = y^2(1-y^2) \Rightarrow y=0 \text{ eller } y = \pm 1 \rightsquigarrow (0,0),\ (0,\pm 1)$$

ej i området

$y=0$ i första ekv.:

$$0 = 3x^2(1-x^2) + 2x^4 = x^2(3-x^2) \Rightarrow x=0 \text{ eller } x = \pm\sqrt{3}$$

$$\rightsquigarrow (0,0),\ (\pm\sqrt{3},0)$$

ej i området

$\Rightarrow$ Enda stat. punkten i området är $(0,0)$ med $f(0,0) = 0$

Rand: Parametriseras av $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

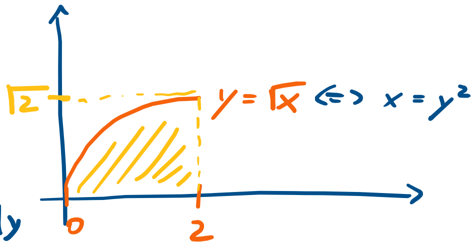
Där har vi

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{2}\cos t \cdot \frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}\cos t}{3/4} = \frac{\cos t}{6},$$

vilket blir som störst vid $t = 0, 2\pi$ och minst vid $t = \pi$, med värden $\frac{1}{6}\cos(0) = \frac{1}{6}$ resp. $\frac{1}{6}\cos(\pi) = -\frac{1}{6}$

Kandidaterna för största och minsta värde är alltså $-\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}$. $\Rightarrow$ Max $= \frac{1}{6}$, Min $= -\frac{1}{6}$

3) (a) Skiss på området:



$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{2}}\int_{y^2}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

(b) Polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$

$\frac{1}{2} \le r \le 2,$

$-\frac{3\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{4}$

$$\iint_D \frac{x}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{r\cos\vartheta}{(1+r^2)\,r}\,r\,dr\right)d\vartheta$$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\vartheta\,d\vartheta \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{r}{1+r^2}\,dr$$

$$= \left[\sin\vartheta\right]_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\ \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{2r}{1+r^2}\,dr$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\ln(1+r^2)\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln(5) - \ln\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln(5) - \ln(5) + \underbrace{\ln(4)}_{=2\ln(2)}\right)$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2}\,\ln(2)}}$$

4| $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$

Homogen DE: karakt. ekvation $0 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$, lösningar $\lambda = 5$ (dubbelt). Allmän lösning:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{5x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Inhomogen DE: "Dubbelt" resonansfall: e^{5x} är lösning till den homogena DE:n, och samma för xe^{5x}. Därför ansats

$$y_p(x) = Ax^2 e^{5x}.$$

Då

$$y_p'(x) = (2Ax + 5Ax^2)e^{5x},$$

$$y_p''(x) = (2A + 10Ax + 10Ax + 25Ax^2)e^{5x}$$

$$= (2A + 20Ax + 25Ax^2)e^{5x}.$$

Stoppas in i DE:n:

$$e^{5x} \overset{!}{=} y_p'' - 10y_p' + 25y_p$$

$$= e^{5x}(2A + 20Ax + 25Ax^2 - 20Ax - 50Ax^2 + 25Ax^2)$$

$$= 2Ae^{5x} \Rightarrow A = \tfrac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2}{2}e^{5x}.$$

Allmän lösning:

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right)e^{5x}$$

5] (a) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sägs att konvergera mot s om

$$s = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k \right)$$

(där $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$)

(b) Nej! Motexempel är $a_k = \frac{1}{k^2}$. Då konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, men $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent (harmoniska serien)

(c) Med Cauchys integralkriterium:
Låt $f(x) := x e^{-x}$, $1 \leq x < \infty$.
Då är f kontinuerlig, t.o.m. deriverbar, icke-negativ, och

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x),$$

vilket är negativ för $x > 1$. Alltså är f avtagande på $[1, \infty)$. Särskilt är serien konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent. Vi har

$$\int f(x)\,dx = \int x e^{-x}\,dx \underset{\text{p.I.}}{=} -x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1).$$

$u(x) = x, \ v(x) = -e^{-x}$
$u'(x) = 1, \ v'(x) = e^{-x}$

Detta ger

$$\int_1^b f(x)\,dx = \underbrace{-e^{-b}(b+1)}_{\to 0 \text{ då } b \to \infty} + 2e^{-1} \longrightarrow 2e^{-1} \text{ då } b \to \infty$$

$\Rightarrow$ Integralen och därmed serien konvergerar.