Tenta Analys del 2 2/6/2025

(1) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$f'''(x) = 2\left[4xe^{-x^2} + (2x^2-1)(-2x)e^{-x^2}\right]$

$= -4xe^{-x^2}(2x^2-3)$

$\Rightarrow p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$

$= 1 - x^2$

Restterm: $R_3(x) = \dfrac{-4\xi e^{-\xi^2}(2\xi^2-3)}{6}x^3$

för något ξ mellan 0 och x. För $-0{,}1 \leq x \leq 0{,}1$ har vi även $|\xi| \leq 0{,}1$ och därför

$|R_3(x)| = \frac{2}{3}|\xi| e^{-\xi^2} |2\xi^2-3| \, |x|^3$

$\leq \frac{2}{3} \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0{,}1^3$

$= \underline{\underline{2 \cdot 10^{-4}}}.$

② PBU:

$$f(x) = \frac{4x^2+9x+5}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Handpåläggning: $\underline{A} = \frac{4(-2)^2+9(-2)+5}{(-2)^2-2+1} = \frac{3}{3} = \underline{1}$,

sedan

$$\frac{5}{2} = f(0) = \frac{1}{2} + \frac{C}{1} \Rightarrow \underline{C=2},$$

$$2 = \frac{18}{9} = f(1) = \frac{1}{3} + \frac{B+2}{3} \Rightarrow 6 = B+3 \Rightarrow \underline{B=3}.$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx.$$

Dessutom,

$$\int \frac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{3x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{3t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$t = x+\frac{1}{2}$

$x = t-\frac{1}{2}$

$dx = dt$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt$$

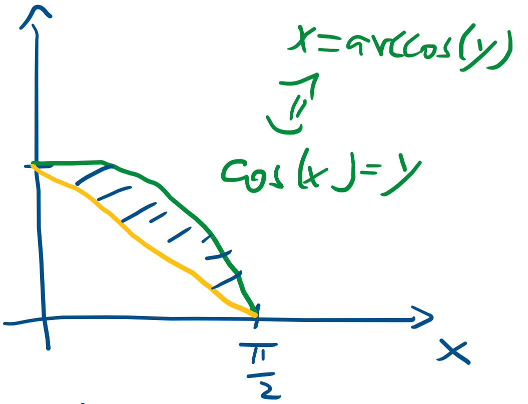
$$= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$u = \frac{2t}{\sqrt{3}}$

$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

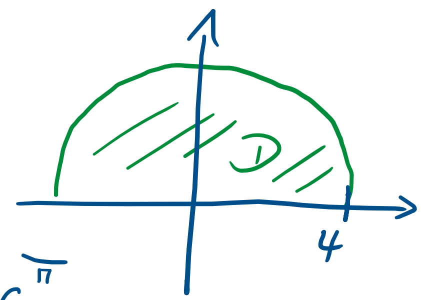
③ (a) Skiss:



$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{1-\frac{2x}{\pi}}^{\cos x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}(1-y)}^{\arccos(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

(b) Polära koordinater $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$

med $0 \le r \le 4$, $0 \le \vartheta \le \pi$



$$\iint_D (40 - x^2 - y^2 - 3y)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^\pi (40 - r^2 - 3r\sin\vartheta)\, r\,d\vartheta\,dr$$

$$= \int_0^4 \left[(40r - r^3)\vartheta + 3r^2\cos\vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} dr$$

$$= \pi \int_0^4 (40r - r^3)\,dr - 6\int_0^4 r^2\,dr$$

$$= \pi \left[20r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^4 - 2\left[r^3 \right]_0^4$$

$$= \pi(320 - 64) - 2\cdot 64$$

$$= \underline{\underline{256\pi - 128}}$$

④ (a) $y' = e^x y^2$ separabel,

$y=0$ konstant lösning, annars ekvivalent

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int e^x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \; -\frac{1}{y} = e^x + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{e^x + C},$$

$$1 \overset{!}{=} y(0) = -\frac{1}{1+C} \Leftrightarrow 1 + C = -1 \Rightarrow \underline{C = -2}$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

b) Kar. ekvation $0 = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$,

dubbelt nollställe $r = 3$

$$\Rightarrow \; y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{3x}$$

⑤ (a) På randen är $x^2+y^2=2$ och därför

$f(x,y)=0.$

Stationära punkter:

$$\begin{cases} 0 = 2xe^{x^2}(2-x^2-y^2) - 2xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1-x^2-y^2) \\ 0 = -2ye^{x^2} \end{cases}$$

Andra ekvationen: $\underline{y=0}$

Första: $0 = 2xe^{x^2}(1-x^2) \Rightarrow x=0$ eller $x=\pm 1$.

$\leadsto$ stat. punkter $(0,0), (-1,0), (1,0)$.

f överallt part. deriverbar. Enda kandidater för max och min alltså

$0,\ f(0,0)=2,\ f(\pm 1,0)=e$

$\Rightarrow$ max e, min 0

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\left(= F'(x_0),\ \text{där } F(x) := f(x,y_0)\right).$$

(c) Då f, g part. deriv. i (x_0,y_0) m.a.p. x är $F(x) := f(x,y_0)$ och $G(x) := g(x,y_0)$ deriverbara i $x=x_0$.

Enligt envariabel-produktregeln gäller samma för $F\cdot G$, och

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(x_0,y_0) = (FG)'(x_0) = F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0).$$