Tenta Analys del 2 29/8/2025

① $$f(x) = \underbrace{\frac{x+1}{x^2+6x+9}}_{=: f_1(x)} + \underbrace{\frac{2x}{x^2+2x+2}}_{=: f_2(x)}$$

•) $$f_1(x) = \frac{x+1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

För $x \neq -3$: $\quad x+1 = A(x+3) + B \Rightarrow \underline{B = -2}$

$x = 0$: $\quad 1 = A \cdot 3 - 2 \Rightarrow \underline{A = 1}$

$$\Rightarrow \int f_1(x)\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + C_1$$

•) Nämnaren i $f_2(x)$ är reellt irreducibel.

$$\int f_2(x)\,dx = \int \frac{2x}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$\underset{\substack{t = x+1 \\ dt = dx}}{=} \int \frac{2t-2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \ln(t^2+1) - 2\arctan(t) + C_2$$

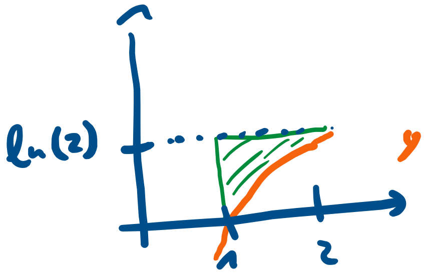
$$= \ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + C_2$$

Sammanlagt:

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

$$= \ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + \ln(x^2+2x+2) - 2\arctan(x+1) + C$$

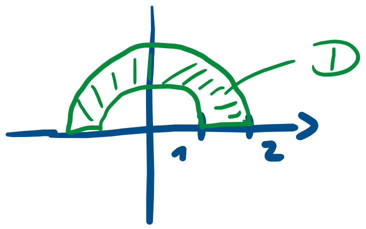
② (a) Integrationsområde:



$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

$$\int_1^2 \left(\int_{\ln(x)}^{\ln(2)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^{\ln(2)} \left(\int_1^{e^y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

(b)



Polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos(\vartheta), & 1 \le r \le 2 \\ y = r\sin(\vartheta), & 0 \le \vartheta \le \pi \end{cases}$$

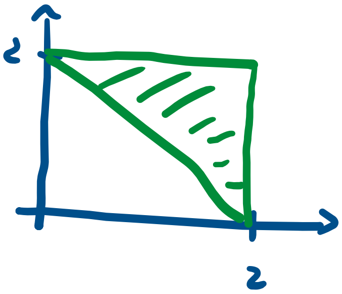
$$\iint_D \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 2 \right) dx\,dy = \int_1^2 \int_0^\pi \left(\frac{r\sin(\vartheta)}{r^3} - 2 \right) r\,d\vartheta\,dr$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{r}\,dr \int_0^\pi \sin(\vartheta)\,d\vartheta - 2\pi \int_1^2 r\,dr$$

$$= \ln(2)\left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) - \pi\left(2^2 - 1^2\right)$$

$$= 2\ln(2) - 3\pi$$

③ $f(x,y) = e^{x^2+y}$ på



f är partiellt deriverbar överallt.

Stationära punkter:

$$\begin{cases} 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2+y} \\ 0 \overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2+y} \end{cases}$$ ingen lösning

$\Rightarrow$ inga stationära punkter.

<u>Rand</u>: <u>$x=2$</u>:

$f(x,y) = e^{4+y}$, $0 \le y \le 2$, <u>växande</u>, min e^4, max e^6

<u>$y=2$</u>:

$f(x,y) = e^{x^2+2}$, $0 \le x \le 2$, växande, min e^2, max e^6

<u>$y = 2-x$</u>:

$g(x) := f(x,y) = e^{x^2+2-x}$, $0 \le x \le 2$,

$g'(x) = (2x-1)e^{x^2+2-x}$, nollställe $x = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ kandidater för max och min: $g(0) = e^2$, $g(\frac{1}{2}) = e^{\frac{7}{4}}$, $g(2) = e^4$

$\Rightarrow$ På denna triangel har f

min $e^{\frac{7}{4}}$, max e^6

④ $y'' + y' - 12y = 2e^{3x} + 1$

Linjär DE av andra ordningen.

•) <u>Homogena DE:n</u>

Karakt. ekvation $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$= \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

Allm. lösn. $y_h(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$ med $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

•) Inhomogena DE:n

Ansats (resonans!)

$$y_p(x) = Axe^{3x} + B$$

$$y_p'(x) = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} = (3x+1)Ae^{3x}$$

$$y_p''(x) = 3Ae^{3x} + 3(3x+1)Ae^{3x} = (9x+6)Ae^{3x}$$

Vill ha

$$2e^{3x} + 1 \overset{!}{=} (9x + 6 + 3x + 1 - 12x)Ae^{3x} - 12B$$

$$= 7Ae^{3x} - 12B$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{7}, \quad B = -\frac{1}{12} \Rightarrow y_p(x) = \frac{2}{7}xe^{3x} - \frac{1}{12}$$

DE:ns allmänna lösning:

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} + \frac{2}{7}xe^{3x} - \frac{1}{12}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

⑤ (a) $g(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}$, $g'(x) = \frac{\cos(x)e^x - \sin(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cos(x)-\sin(x)}{e^x}$,

$$g''(x) = \frac{(-\sin(x)-\cos(x))e^x - (\cos(x)-\sin(x))e^x}{(e^x)^2} = -2\frac{\cos(x)}{e^x}$$

Maclaurin grad 2:

$$p_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 = x - x^2$$

(b)

$$h(x) = \frac{-15x^{n_1+n_2} + \tilde{B}(x)x^{n_1+n_2+1}}{x^m}, \quad \tilde{B} \text{ begränsad nära } 0.$$

$$= -15x^{n_1+n_2-m} + \tilde{B}(x)x^{n_1+n_2-m+1}$$

För att $h(x)$ är definierad i origo behövs $n_1+n_2 \geq m$. Dessutom, för att kunna garantera att h har ett lokalt extremum i origo behöver vi att $n_1+n_2-m \geq 2$ är jämnt, då i så fall

$$h(x) = -15\underbrace{x^{n_1+n_2-m}}_{>0 \text{ för } x\neq 0}\underbrace{(1+\tilde{B}(x)x)}_{>0 \text{ för } x \text{ nära } 0},$$

vilket betyder att $h(x) < 0$ för x nära 0, $x \neq 0$, och $h(0) = 0$. Detta har vi om

$$m = \begin{cases} n_1+n_2-2 & \text{i fall } n_1+n_2 \text{ är jämn,} \\ n_1+n_2-3 & \text{i fall } n_1+n_2 \text{ är udda,} \end{cases}$$

och i detta fall har h ett strängt lokalt maximum i origo.