

**Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständig motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 6 poäng.**

1. Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår när kurvan

$$y = \frac{x^2}{24}, \quad 0 \leq y \leq 18,$$

får rotera runt  $y$ -axeln.

**Denna uppgift togs från problemsamlingarna.**

2. (a) Bestäm samtliga primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + x}. \quad (4p)$$

- (b) Förklara varför dubbelintegralen

$$\iint_D y f(x) dx dy$$

där  $f(x)$  är funktionen ovan och

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$$

har värdet 0. Behöver vi veta den primitiva funktionen från deluppgift (a)? (2p)

### Lösningsförslag

(a) Vi har att göra med en rationell funktion vars täljare har grad 4 och vars nämnare har grad 2. Vi genomför därför polynomdivision för att kunna skriva

$$f(x) = p(x) + g(x),$$

för ett polynom  $p$  och en rationell funktion  $g$  vars täljare har lägre grad än dess nämnare. Vi erhåller

$$p(x) = x^2 - x \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

Vi kan genast bestämma en primitiv funktion till  $p$  i form av

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

där  $C$  är en konstant.

Låt oss därefter bestämma en primitiv funktion till  $g(x)$ . Vi ser att nämnaren kan skrivas som en produkt av två distinkta linjära faktorer,  $x^2 + x = x(x+1)$ . Därmed kan vi ansätta en partialbråksuppdelning på formen

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Vi bildar gemensam nämnare och får

$$\frac{(A+B)x + A}{x^2 + x}$$

och detta uttryck är lika med  $1/(x^2 + x)$  precis när  $A + B = 0$  och  $A = 1$ . Alltså fås

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}.$$

Vi har

$$G(x) = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \ln |x| - \ln |x + 1| + C$$

där  $C$  är en reell konstant.

Genom att addera  $P$  och  $G$  fås nu

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + x} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln |x| - \ln |x + 1| + C.$$

(b) Vi observerar först att integranden kan skrivas på formen  $g(y) \cdot f(x)$  där  $g(y) = y$ . Vidare är området  $D$  av produkttyp,  $D = [1, 2] \times [-1, 1]$ . Enligt ett känt resultat från kursen har vi

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \left( \int_1^2 f(x)dx \right) \left( \int_{-1}^1 g(y)dy \right).$$

Den första faktorn i högerledet är ändlig eftersom  $f$  är slät på intervallet  $[1, 2]$  då funktionens nämnare är nollskild där. Den andra faktorn är lika med 0 eftersom  $y$  är en udda funktion som integreras över en symmetriskt intervall. Därmed inser vi att dubbelintegralens värde är lika med 0 utan att integralen i den första faktorn behöver beräknas.

3. (a) Bestäm Maclaurinpolynomen av ordning 17 till funktionen

$$f(x) = x \cos(x^4) + \frac{x^9}{2}. \quad (3p)$$

- (b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x^4) - x + \frac{x^9}{2}}{x^{16}}. \quad (3p)$$

### Lösningsförslag

- (a) Vi utgår ifrån standardutvecklingen

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + y^6 B_1(y)$$

där  $B$  är begränsad i en omgivning av origo, och erhåller genom substitutionen  $y = x^4$  utvecklingen

$$x \cos(x^4) = x \left( 1 - \frac{(x^4)^2}{2} + \frac{(x^4)^4}{24} + (x^4)^6 B_2(x) \right) = x - \frac{x^9}{2} + \frac{x^{17}}{24} + x^{25} B_2(x)$$

för en funktion  $B_2$  begränsad i en omgivning av origo. Det sökta Maclaurinpolynomet ges således av

$$p_{17}(x) = x - \frac{x^9}{2} + \frac{x^{17}}{24}.$$

- (b) Vi utnyttjar utvecklingen i (a) för att skriva

$$x \cos(x^4) - x + \frac{x^9}{2} = \frac{x^{17}}{24} + x^{25} B_2(x)$$

för en funktion  $B_2$  som är begränsad i en omgivning av origo. Detta ger att

$$\frac{1}{x^{16}} \left( x \cos(x^4) - x + \frac{x^9}{2} \right) = \frac{x}{24} + x^9 B_2(x)$$

vilket låter oss dra slutsatsen att det sökta gränsvärdet är lika med 0.

4. (a) Skissa området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}. \quad (1p)$$

(b) Förklara varför vi kan vara säkra på att  $f(x) = 4x^2y - y$  antar ett största värde och ett minsta värde på  $D$ . (2p)

(c) Bestäm det största värdet och det minsta värdet som funktionen

$$f(x, y) = x^2y - y$$

antar på mängden  $D$  i deluppgift (a) och ange i vilka punkter dessa antas. (3p)

### Lösningsförslag

(a) Området är en roterad kvadrat med sidor parallella med  $y = x$  och  $y = -x$  respektive.

(b) Den givna funktionen ges av ett polynom i två variabler och är således godtyckligt många gånger partiellt deriverbar i planet, och speciellt kontinuerlig i hela  $\mathbb{R}^2$ . Området  $D$  är slutet och begränsat, alltså kompakt. Enligt satsen om extremvärden antar således funktionen  $f$  ett största och ett minsta värde på  $D$ .

(c) Eftersom  $f$  är partiellt deriverbar i planet och speciellt i  $D$  föreligger inga punkter där  $f$  saknar partiell derivata. Vi undersöker alltså  $f$ 's värden i stationära punkter i  $D$  samt i randpunkterna till  $D$ .

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Villkoret  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  ger att  $x = \pm 1$ . Insatt i  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  ger detta att  $y = 0$ . Punkterna  $(\pm 1, 0)$  ligger i två av hörnen till  $D$  och därmed saknas stationära punkter i det inre av  $D$ .

Vi undersöker därför  $f$  på randen  $\partial D$  vilken med fördel kan delas upp i fyra komponenter. Vi går igenom dessa moturs.

Den första randkomponenten ges av linjesegmentet  $y = 1 - x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Vi erhåller randfunktionen

$$g_I(x) = f(x, 1 - x) = x^2(1 - x) - (1 - x) = -x^3 + x^2 + x - 1.$$

Vi har  $g_I(0) = -1$  och  $g_I(1) = 0$  samt  $g'_I(x) = -3x^2 + 2x + 1$ . Vi ser med hjälp av exempelvis kvadratkomplettering att  $g'_I(x) = (1 - x)(3x + 1)$  och eftersom detta uttryck är icke-negativt på  $[0, 1]$  är  $g_I$  växande på detta intervall.

En andra randkomponent ges av  $y = 1 + x$ ,  $-1 \leq x \leq 0$ . Denna ger upphov till

$$g_{II}(x) = f(x, 1 + x) = x^2(1 + x) - (1 + x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Vi har  $g_{II}(-1) = 0$  och  $g_{II}(0) = -1$  samt  $g'_{II}(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x + 1)(3x - 1) \leq 0$  när  $-1 \leq x \leq 0$  vilket betyder att funktionen  $g_{II}$  är avtagande för dessa värden på  $x$ .

Tredje randkomponenten beskrivs av  $y = -1 - x$ ,  $-1 \leq x \leq 0$  och ger oss

$$g_{III}(x) = x^2(-1 - x) - (-1 - x) = -x^3 - x^2 + x + 1.$$

Denna funktion har  $g_{III}(-1) = 0$  samt  $g_{III}(0) = 1$ , och  $g'_{III}(x) = (1 - 3x)(x + 1)$ . Därmed är  $g_{III}$  växande på  $[-1, 0]$ .

En sista randkomponent ges av  $y = x - 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , och ger upphov till

$$g_{IV}(x) = x^2(x - 1) - (x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Vi ser att  $g_{IV}(0) = 1$  och  $g_{IV}(1) = 0$  medan  $g'_{IV}(x) = (x - 1)(3x + 1)$  är negativ på intervallet  $[0, 1]$  vilket medför att  $g_{IV}$  är avtagande där.

Efter en jämförelse av funktionen  $f$ 's värden i de fyra hörnen erhåller vi alltså ett största värde 1 i punkten  $(0, -1)$  och ett minsta värde  $-1$  i punkten  $(0, 1)$ .

5. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = e^{2x} - 1.$$

### Lösningsförslag

Enligt en känd sats kan den allmänna lösningen till differentialekvationen skrivas på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

där  $y_h$  är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation medan  $y_p$  är en partikulärlösning.

Vi börjar alltså med att lösa den homogena ekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$

Den sedvanliga ansatsen  $y(x) = e^{rx}$  leder till den karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2r - 1 = 0.$$

Vi kvadratkompletterar  $r^2 + 2r - 1 = (r + 1)^2 - 2$  och erhåller två distinkta rötter  $r_1 = -1 - \sqrt{2}$  och  $r_2 = -1 + \sqrt{2}$ . Därmed ges den allmänna lösningen till det homogena problemet av

$$y_h(x) = C_1 e^{-(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-1+\sqrt{2})x},$$

där  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  är konstanter.

Vi söker nu en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Eftersom vi har att göra med en inhomogenitet som ges av en summa av en exponentialfunktion och en konstant ansätter vi

$$y(x) = A + Be^{2x}$$

och söker bestämma  $A$  och  $B$  så att ekvationen är uppfylld. Notera att resonans ej föreligger då vi har  $2x$  i exponenten hos inhomogeniteten.

Derivering ger  $y'(x) = 2Be^{2x}$  och  $y''(x) = 4Be^{2x}$ . Insättning i vänsterledet ger

$$4Be^{2x} + 2 \cdot 2Be^{2x} - A - Be^{2x} = -A + 7Be^{2x}.$$

Vi vill att detta ska vara lika med  $e^{2x} - 1$  vilket ger villkoren  $-A = -1$  samt  $7B = 1$ . En partikulärlösning ges alltså av

$$y_p(x) = \frac{1}{7}e^{2x} + 1.$$

Slutligen ges den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-1+\sqrt{2})x} + \frac{1}{7}e^{2x} + 1$$

där  $C_1, C_2$  är reella konstanter.