

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständig motivering krävs i varje uppgift. Varje uppgift är värd 6 poäng.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (3x + 3y)^2 dx dy$$

där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$.

Denna uppgift togs från problemsamlingarna.

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Lösningsförslag

Vi förkortar först den gemensamma faktorn x i täljare och nämnare och observerar att täljarpolynomet (både före och efter denna förkortning) har lägre grad än polynomet i nämnaren.

Vi ser att nämnaren kan skrivas

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Vi har således att ansätta uppdelningen

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}.$$

Villkoret

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 4}{(x + 1)^2}$$

har lösningarna $A = B = 2$ vilket betyder att

$$\int \frac{2x + 4}{(x + 1)^2} dx = \int \frac{2dx}{x + 1} + \int \frac{2dx}{(x + 1)^2}.$$

Den första integralen kan beräknas direkt och vi får $\int 2/(x+1) dx = 2 \ln |x+1| + C$. Den andra integralen kan exempelvis beräknas med substitutionen $u = x + 1$. Vi får $\int 2/(x+1)^2 dx = -2/(x+1) + C$. Därmed fås

$$\int dx = 2 \left(\ln |x + 1| - \frac{1}{x + 1} \right) + C$$

där C är en reell konstant.

3. Bestäm med hjälp av Maclaurinutveckling ett värde på $a \in \mathbb{R}$ som gör att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{2} - ax^7}{x^{11}}$$

existerar och är nollskilt. Finns det flera möjligheter att välja ett sådant a ?

Lösningsförslag

Vi drar oss till minnes standardutvecklingen

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + O(t^7)$$

och sätter $t = x^2/2$. Detta ger oss

$$\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^{10}}{3840} + O(x^{12})$$

samt efter multiplikation med x

$$x \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^7}{48} + \frac{x^{11}}{3840} + O(x^{13}).$$

Vi ser nu att om och endast om $a = -1/48$ fås

$$x \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{2} - ax^7 = \frac{1}{3840}x^{11} + O(x^{13})$$

vilket gör det givna gränsvärdet nollskilt och ändligt.

4. (a) Skissa området

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(b) Förklara varför vi kan vara säkra på att $f(x, y) = 1 + x^2y$ antar ett största och ett minsta värde på D .

(c) Bestäm det största och minsta värdet som funktionen

$$f(x, y) = 1 + x^2y$$

antar på D .

Lösningsförslag

(a) Området är en cirkelskiva med radie 2.

(b) En cirkelskiva med ändlig radie är kompakt och varje polynom i två variabler är kontinuerlig. Således antar varje polynom i två variabler ett största och ett minsta värde på D , speciellt även det givna polynomet f .

(c) Vi noterar först att f är godtyckligt många gånger deriverbar i $\mathbb{R}^2$, speciellt på D . Det föreligger alltså inga punkter där f ej är partiellt deriverbar.

Vi söker kritiska punkter genom att beräkna $\partial_x f = 2xy$ samt $\partial_y f = x^2$. Vi erhåller en kurva av kritiska punkter på formen $(0, y)$. Vi har $f(0, y) = 1$.

Vi kan undersöka randen som följer: på ∂D har vi $x^2 = 4 - y^2$. Genom insättning av detta samband får vi randfunktionen

$$g(y) = f(4 - y^2, y) = 1 + (4 - y^2)y = 1 + 4y - y^3.$$

Derivering ger

$$g'(y) = 4 - 3y^2$$

och vi får nollställena $y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Från sambandet $x = \pm \sqrt{4 - y^2}$ fås motsvarande x -koordinater $x = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$. Insättning av dessa i f ger största värde $1 + 16/(3\sqrt{3})$ samt minsta värde $1 - 16/(3\sqrt{3})$.

5. Finn den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 4y(x) = \sin(3x) + 1.$$

Lösningsförslag

Vi bestämmer först en lösning till den homogena ekvationen. Vi ansätter $y = e^{rx}$, deriverar och sätter in i differentialekvationen. Detta ger oss sekulärekvationen $r^2 + 4 = 0$, vilken har de konjugerade imaginära rötterna $r_1 = 2i$ och $r_2 = -2i$. Tack vare Eulers identiteter får vi alltså den allmänna lösningen

$$y_h(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

Vi söker därefter en partikulärlösning till differentialekvationen. Resonans föreligger ej, och vi kan ansätta y_p på trigonometrisk form plus en konstant. Vi får $y_p = 1/4 - 1/5 \sin(3x)$.

Slutligen fås

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \sin(3x).$$