

Lösningssförslag till tentamensskrivning i MM2001: analys del 2, 2026-06-04

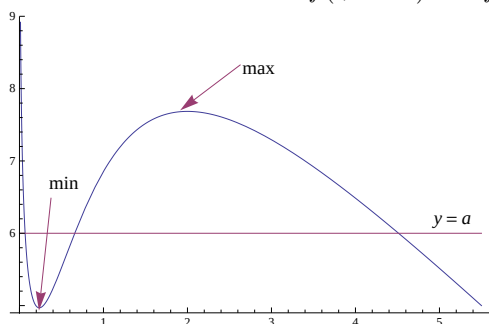
Yishao Zhou// June 5, 2026

1. Vi beräknar gränsvärdena för $f(x)$ då $x \rightarrow 0^+$ respektive $x \rightarrow \infty$: $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$ och $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow \infty$. Det ger värdemängden $(-\infty, \infty)$. Det innebär att $f(x) = a$ har minst en lösning för alla reella tal a .

Funktionen är kontinuerlig och deriverbar. Derivation ger $f'(x) = \frac{10}{1+x^2} - \frac{2}{x} - 1$. Med inspektion ser vi att $f'(2) = 0$, vilket leder till $f'(x) = -\frac{(x-2)(x^2+4x-1)}{x(1+x^2)}$ efter polynomdivision. Detta visar att derivatan har nollställen i $x = 2$ och $x = \sqrt{5}-2$ i definitionsmängden $(0, \infty)$. Vi får följande teckentabell:

x	0	$\sqrt{5}-2$	2		
f'	-	0	+	0	-
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Alltså är det maximalt antal rötter som ekvationen $f(x) = a$ kan ha 3 för a mellan $f(\sqrt{5}-2)$ och $f(2)$.



2. (i) Använd standardutveckling: $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3)$ eller derivera $\sqrt{1+t}$ två gånger. Insättningen av $t = x^6$ och $\alpha = \frac{1}{2}$ ger $f(x) = 1 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{8} + \mathcal{O}(x^{13}) \Rightarrow \frac{f^{(12)}(0)}{12!} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{f^{(12)}(0) = -\frac{12!}{8}}$

(ii) Låt $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$. Enligt standardutvecklingar för e^t och $\sqrt{1+t}$

$$\begin{aligned} & \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right) \\ &= \frac{(2-2y+y^2)e^y - 2\sqrt{1+y^6}}{2y^3} \\ &= \frac{(2-2y+y^2)(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\mathcal{O}(y^4)) - 2(1+\mathcal{O}(y^6))}{2y^3} \\ &= \frac{\frac{y^3}{3} + \mathcal{O}(y^4)}{2y^3} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(y)}{2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

3. (i) De stationära punkterna ges av

$$\nabla f(x, y) = (x^2 - y, -x + 2y) = (0, 0).$$

vilket har den entydiga lösningen $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ innanför området, och $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{48}$.

Randen består av fyra linjesegment:

(a) $y = 0, 0 \leq x \leq 2$: $g_1(t) = f(t, 0) = \frac{1}{3}t^3$ är stängt växande $\max_{0 \leq t \leq 2} g_1(t) = g_1(2) = \frac{8}{3}, \min_{0 \leq t \leq 2} g_1(t) = g_1(0) = 0$.

(b) $x = 2, 0 \leq y \leq 2$: $g_2(t) = f(2, t) = t^2 - 2t + \frac{8}{3} = (t-1)^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow g_2$ har en stationär punkt i $t = 1 \Rightarrow \max_{0 \leq t \leq 2} g_2(t) = \max(g_2(0), g_2(2), g_2(1)) = \max(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}) = \frac{8}{3}; \min_{0 \leq t \leq 2} g_2(t) = \min(g_2(0), g_2(2), g_2(1)) = \min(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}) = \frac{5}{3}$.

(c) $y = 2, 0 \leq x \leq 2$: $g_3(t) = f(t, 2) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 4$ har en stationär punkt i $t = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\max_{0 \leq t \leq 2} g_3(t) = \max(g_3(0), g_3(2), g_3(\sqrt{2})) = g_3(0) = 4;$

$\min_{0 \leq t \leq 2} g_3(t) = \min(g_3(0), g_3(2), g_3(\sqrt{2})) = g_3(\sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2}/3.$

(d) $x = 0, 0 \leq y \leq 2$: $g_4(t) = f(0, t) = t^2$ är strängt växande för $0 \leq t \leq 2 \Rightarrow \max_{0 \leq t \leq 2} g_4(t) = g_4(2) = 4,$

$\min_{0 \leq t \leq 2} g_4(t) = g_4(0) = 0.$

Sammanfattningsvis är största värde 4 och minsta värde är $-1/48$.

(ii) Först konstanterar vi att punkten verkligen på kurvan eftersom $f(0, 2) = 4$. Enligt en sats är $\nabla f(0, 2) = (-2, 4)$ normalen till nivåkurvan i punkten $(0, 2)$. Då har vi tangenten till $f(x, y) = 4$: $\nabla f(0, 2)(x, y-2)^\top = 0 \Leftrightarrow \boxed{-x + 2y - 4 = 0}.$

4. (i) Låt $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Då

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

$$\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^\pi r \sin r dr = \frac{\pi^2}{4}.$$

(ii) Observera att D är begränsade av kurvorna $y = x$ då $0 \leq x \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$ då $\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq x \leq \pi$ samt den positiva x -axeln. Alltså är volymen

$$V_x = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \pi x^2 dx + \int_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^\pi \pi(\pi^2 - x^2) dx = \boxed{\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi^4}.$$

5. (i) Differentialekvationen kan skrivas om till (med inspektion eller medmetoden för integrerande faktor) $D(y(1+x^2)) = 4x(1+x^2) \Leftrightarrow y(1+x^2) = x^4 + 2x^2 + C$. Bivilkoret $y(0) = 1$ ger $C = y(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Vi får därför $y = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2 + 1} = x^2 + 1$.

(ii) Den associerade homogena ekvationen har lösningen:

$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}$, där $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ansätt $y_p(x) = Ax$, där A ska bestämmas. Insättningen av denna ansats i ekvationen ger $2A = 2$, dvs $A = 1 \Rightarrow y_p(x) = x \Rightarrow$ Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + x}$$