

Inga hjälpmedel tillåtna. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng ger säkert godkänt.

1. Visa att $f(x) = |\arctan x| + \ln(x^2 + 1) - x \geq 0$ för alla $x \leq 0$.

6 p

2. (i) Beräkna $f^{(17)}(0)$ då

$$f(x) = x \cos(x^4) + \frac{x^9}{2}.$$

- (ii) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^8 \left(1 - 2x^8 + 2x^8 \cos\left(\frac{1}{x^4}\right) \right).$$

6 p

3. (i) Bestäm största och minsta värde till funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1$ i det område som definieras av att $x^2 + y^2 \leq 16$.
(ii) Beräkna, med hjälp av integral, arean av den rotationsyta som uppstår när kurvan $x^2 + y^2 = 16$ får rotera runt x -axeln.

6 p

4. Låt $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$.

- (i) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

där $D = \{(x, y) : y \geq |x|, x^2 + y^2 \leq 1\}$

- (ii) Låt $g(r, t) = f(2r \cos t, r \sin t)$. Beräkna $\frac{\partial g}{\partial r}$ och $\frac{\partial g}{\partial t}$ med kedjeregeln i två variabler. Bestäm därefter tangentplanet till ytan $s = g(r, t)$ i punkten $(0, 0, 1)$

6 p

5. (i) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' + \frac{5xy}{1+x^2} = 0$. Bestäm den lösning till ekvationen $y' + \frac{5xy}{1+x^2} = 2x$ som uppfyller $y(0) = \frac{2}{7}$.
(ii) Beräkna den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

6 p

Lycka till!