

1. Det är trivialt. Men allmänt följer det av argumentet nedan. Derivatans av $f(x)$ är

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} < 0, \text{ för alla } x \leq 0$$

Det medför att $f(x)$ är strängt avtagande för $x < 0$. Vidare har vi $f(0) = 0$ och $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow -\infty$. Således gäller $f(x) \geq 0$ för $x \leq 0$.

2. (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cos(x^4) + \frac{x^9}{2} \\ &= x \left(1 - \frac{(x^4)^2}{2} + \frac{(x^4)^4}{4!} + \mathcal{O}(x^{24}) \right) + \frac{x^9}{2} = x - \frac{x^9}{2} + \frac{x^{17}}{4!} + \mathcal{O}(x^{25}) \\ \Rightarrow f^{(17)}(0) &= \frac{17!}{4!} \end{aligned}$$

- (ii) Låt $y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} x^8 \left(1 - 2x^8 + 2x^8 \cos\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) &= \frac{y^8 - 2 + 2\cos(y^4)}{y^{16}} \\ &= \frac{y^8 - 2 + 2\left(1 - \frac{y^8}{2} + \frac{y^{16}}{4!} + \mathcal{O}(y^{24})\right)}{y^{16}} \rightarrow \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Notera att beräkningen blir enklare om vi utveckla $\cos \frac{1}{x^4} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x^8} + \frac{1}{4!} \frac{1}{x^{16}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{24}}\right)$.

3. (i) WeBWorK-uppgift.

- (ii) Vi roterar kurvan $y = \sqrt{16 - x^2}$ kring x -axeln, för $-4 \leq x \leq 4$.

$$A = \int_{-4}^4 2\pi y \sqrt{1 - (y')^2} dx = 2\pi \int_{-4}^4 4 dx = 64\pi.$$

4. (i) Området $D = \{(r, \theta) : r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 e^{r^2} r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4} (e - 1)$$

- (ii) Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial r} &= 2 \cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -2r \sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r \cos t \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = 2r(4 \cos^2 t + \sin^2 t) e^{4 \cos^2 t + \sin^2 t} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -6r^2 \sin t \cos t e^{4 \cos^2 t + \sin^2 t} \end{aligned}$$

Tangentplanet till $s = g(r, t)$ i $(0, 0, 1)$ är

$$s - 1 = \frac{\partial g}{\partial r}(0, 0)r + \frac{\partial g}{\partial t}(0, 0)t$$

dvs $s = 1$

5. (i) WeBWorK-uppgift

- (ii) Den associerade homogena ekvationen har lösningen:

$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$, där $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ansätt $y_p(x) = Ax^2 e^{-x}$, där A ska bestämmas, eftersom båda e^{-x} och $x e^{-x}$ är lösningar till den associerade homogena ekvationen. Insättningen av denna ansats i ekvationen ger $A = 1/2 \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \Rightarrow$ Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$