MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
4 januari 2024

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Bonuspoängen från terminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara relativt standardbasen om inget annat anges.

1. Låt (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös de tre (separata) matrisekvationerna

$$A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna vidare A^{-1}, eller motivera varför A ej är inverterbar.

2. Beräkna determinanten av matrisen (5p)

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 60 & 20 & 20 \\ 90 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Bestäm vidare volymen av parallellepipeden i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av de tre vektorerna $(3,6,9)$, $(1,2,4)$, $(0,2,2)$.

3. Bestäm en ekvation på normalform för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller båda följande linjer: (5p)

$$\begin{aligned} L_1 &: (x,y,z) = (0,5,10) + t(12,2,-1), \qquad && t \in \mathbb{R} \\ L_2 &: (x,y,z) = (12,9,9) + s(0,2,0), && s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Var god vänd!

4. Bestäm avståndet mellan de två planen i $\mathbb{R}^3$ som har ekvationer $x-2y+2z=1$ respektive $x-2y+2z=10$, samt ange två punkter, en på vardera plan, som har detta avstånd mellan sig. (5p)

5. Betrakta följande två linjära avbildningar $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: (5p)

   - S som speglar en vektor i planet $x-2y+z=0$, och
   - R som roterar en vektor kring x-axeln en vinkel $\pi/2$ moturs (sett från x-axelns spets).

   Bestäm matriserna relativt $\mathbb{R}^3$:s standardbas för S, för R och för den sammansatta avbildningen T som först utför S på en vektor och sedan utför R på resultatet.

6. (a) Ange definitionen av att vektorer $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k} \in \mathbb{R}^n$ är *linjärt oberoende.* (2p)

   (b) Anta att $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ är linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$. Måste de tre vektorerna $\vec{v_1}+\vec{v_2}$, $\vec{v_2}+\vec{v_3}$, $\vec{v_1}+\vec{v_3}$ vara linjärt oberoende? Bevisa ditt svar. (3p)