MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
4 januari 2024

1. Vi skriver om dessa tre system i utökad matrisform, med en kolonn i 'högerledet' för varje system, för att kunna lösa de samtidigt via Gausseliminering:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Därmed är lösningarna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa vektorer är faktiskt precis kolonnerna till A^{-1}: om vi skriver om de tre vektorekvationerna som en matrisekvation så tar den formen

$$A \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilket motsvarar att matrisen $(\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})$ är en högerinvers till A, och är därmed den unika inversen till A.

Svar: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ som ovan, och

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Vi förenklar först med egenskaper hos determinanter, börjande med att dra ut gemensamma faktorer ur kolonnerna:

$$\begin{vmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 60 & 20 & 20 \\ 90 & 20 & 40 \end{vmatrix} = 30 \cdot 20 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6000 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6000,$$

där vi i andra steget subtraherade en kopia av de första och andra raderna från den tredje, och 2 kopior av den första raden från den andra, och i tredje steget använde att matrisen är triangulär.

Enligt resultat från kursen ges volymen av parallellepipeden som spänns upp av vektorerna av absolutbeloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

som vi ser är nästan samma som den ursprungliga determinanten, bara med två kolonner ombytta och med en faktor 10 mindre i varje kolonn. Kolonnordningen påverkar endast determinantens tecken, och de saknade faktorerna ger därmed att volymen är $6000/10^3 = 6$.

Svar: Determinanten är 6000, och volymen 6.

3. Vi söker först skärningspunkten mellan linjerna (som måste finnas om det finns ett plan som innehåller båda linjer): ansättningen $(0,5,10) + t(12,2,-1) = (12,9,9) + s(0,2,0)$ är ekvivalent med att $s = -1$, $t = 1$. Därmed skär linjärna varandra i punkten $(x,y,z) = (12,7,9)$.

   Sedan söker vi planets normalvektor. För detta kan vi ta vilken nollskild vektor $\vec{n}$ som helst som är ortogonal mot linjernas riktningsvektorer, t.ex.

$$\vec{n} = (12,2,-1) \times (0,2,0) = \cdots = (2,0,24).$$

   En ekvation för planet är därmed

$$2(x-12) + 24(z-9) = 0 \iff 2x + 24z = 240 \iff x + 12z = 120.$$

   Svar: $x + 12z = 120$.

4. (Rita en bild.) Kalla planen Π_1 respektive Π_2. Avståndet mellan planen ges av längden av en vektor som går mellan Π_1 och Π_2 som är ortogonal mot de båda, dvs av en vektor $\lambda\vec{n}$ som är parallell med en normalvektor $\vec{n}$ till planen. Vi väljer $\vec{n} = (1,-2,2)$ som normalvektor, och söker då en konstant λ som har egenskapen att, för $(x,y,z) \in \Pi_1$ så gäller $(x,y,z) + \lambda\vec{n} \in \Pi_2$. Detta gäller om och endast om

$$\vec{n}\cdot\big((x,y,z)+\lambda\vec{n}\big) = 10 \iff \vec{n}\cdot(x,y,z)+\lambda\vec{n}\cdot\vec{n} = 10 \iff 1+9\lambda = 10 \iff \lambda = 1.$$

   Alltså ges avståndet av

$$|\overrightarrow{\lambda n}| = |\vec{n}| = 3.$$

   För att hitta två punkter på planen som har detta avstånd mellan sig: vi väljer en godtycklig punkt $P : (x,y,z) = (1,0,0)$ på Π_1 och får (enligt ovan resonemang) $Q : (x,y,z) = (1,0,0) + \vec{n} = (2,-2,2)$ på Π_2.

   Svar: Avstånd 3, och två punkter: $(1,0,0)$ och $(2,-2,2)$ (t.ex).

5. För S: planet har en normalvektor $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$, och speglingen ges av

$$S(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\,\mathrm{proj}_{\overrightarrow{n}}\,\overrightarrow{v}.$$

Om $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ så kan vi skriva detta som

$$S(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - 2\left(\tfrac{a-2b+c}{6}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A_S\overrightarrow{v}.$$

För R: denna avbildning avbildar

- $\overrightarrow{e_1}$ på $\overrightarrow{e_1}$,
- $\overrightarrow{e_2}$ på $\overrightarrow{e_3}$, och
- $\overrightarrow{e_3}$ på $-\overrightarrow{e_2}$.

Därmed har den motsvarande matrisen relativt standardbasen kolonnerna $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ respektive $(0, -1, 0)$:

$$A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sammansättningen har då, enligt sats från kursen, matris som är en produkt av dessa (i rätt ordning):

$$A_{RS} = A_R A_S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$A_S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{RS} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Vektorerna $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in \mathbb{R}^n$ kallas linjärt oberoende om de enda skalärerna $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ som uppfyller $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0}$ är $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

(b) Vi undersöker för vilka skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ det gäller att

$$\lambda_1(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + \lambda_2(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) + \lambda_3(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{0}.$$

Detta gäller om och endast om

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\overrightarrow{v_1} + (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{v_2} + (\lambda_2 + \lambda_3)\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}.$$

Eftersom $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ är linjärt oberoende gäller detta om och endast om

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lösning av detta system, t.ex. via substitution eller Gausseliminering, ger att den enda lösningen är $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Alltså är $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}$ linjärt oberoende.