MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
10 februari 2024

Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Max antal poäng på tentan är 30, och 15 skrivningspoäng ger betyg åtminstone E.

Bonuspoäng från problemsamlingar från höstterminen 2023 räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara relativt standardbasen om inget annat anges.

1. Lös följande ekvationssystem samt beräkna den angivna determinanten. (5p)

$$\begin{cases} 5x - 2y - 4z = 52 \\ 4x - 2y - 4z = 32 \\ -5x + 5y + 10z = 20 \end{cases} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

2. Avgör om nedan ekvation i $\mathbb{R}^3$ beskriver en punkt, en linje, ett plan eller hela rummet. Delpoäng kan ges för korrekt angivna definitioner av, eller hänvisningar till, begreppen *linjärt beroende* och *linjärt oberoende*. (5p)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

3. Bestäm arean av följande trianglar, som har hörn i de angivna punkterna: (4p)

$$\Delta_1 : \text{hörn i } (1,2),\ (0,8),\ (8,2) \in \mathbb{R}^2;$$
$$\Delta_2 : \text{hörn i } (3,0,5),\ (0,3,5),\ (3,3,11) \in \mathbb{R}^3.$$

4. Bestäm (det minsta) avståndet mellan linjen L och planet Π i $\mathbb{R}^3$ med följande ekvationer: (5p)

$$L : (x,y,z) = (0,4,2) + t(2,0,1), \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\Pi : (x,y,z) = (2,2,-4) + r(2,0,1) + s(0,1,-1), \qquad r, s \in \mathbb{R}.$$

Var god vänd!

5. Den linjära avbildningen T har matrisen (6p)

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

i planets standardbas. Låt $\overrightarrow{f_1} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ och $\overrightarrow{f_2} = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Visa att $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ är en ON-bas för planet, att matrisen för T relativt denna bas är $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, samt ge en geometrisk tolkning för avbildningen T.

6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (dvs från planet till planet) vara en funktion.

   (a) Ange definitionen av att T är en linjär avbildning. (2p)

   (b) Bevisa att om $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning, då finns det en 2×2-matris A så att $T(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$ för alla $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$ (där $\overrightarrow{x}$ betraktas som en kolonnvektor/kolonnmatris). (3p)