MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Olof Sisask
Föreläsare: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 24 maj 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoängen räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. För ett reellt tal a, betrakta ekvationssystemet (5p)

$$\begin{cases} x + 3y + 4z &= a \\ \quad\;\; y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + 2z &= a. \end{cases}$$

   Avgör för vilket a systemet är lösbart och beskriv lösningarna både algebraiskt och geometriskt[1] i detta fall.

2. Låt A vara matrisen $\begin{pmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 30 & 20 & 20 \\ 20 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Ge välmotiverade svar på frågorna nedan. (5p)

   (a) Vad är determinanten av A?

   (b) Är matrisen A inverterbar?

   (c) Finns det mer än en vektor $\mathbf{v}$ så att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$?

   (d) Formulera en sats om allmänna kvadratiska matriser B som ger sambandet mellan determinanten av B, inverterbarhet hos B och lösningar till $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

3. (a) Beräkna skalärprodukten $(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 1)$. (1p)

   (b) Bestäm arean av den parallellogram som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 0, 1)$. (2p)

   (c) Om $\|\mathbf{w}\|^2 = 9$, $\|\mathbf{u}\|^2 = 4$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 4$, bestäm $(2\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{u})$. (2p)

   Notera att $\|\mathbf{v}\|$ *betecknar längden av* $\mathbf{v}$.

---

[1]Punkt, linje eller plan?

Vänligen vänd!

4. Låt linjen L i $\mathbb{R}^3$ ges av $(x, y, z) = (4, 7, 4) + t(1, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Finn de två punkterna på L vars avstånd till origo är 9. (2p)

   (b) Finn det plan som innehåller L och som inte skär z-axeln. Ange planet på normalform. (3p)

5. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som speglar i planet genom origo med normalen $\mathbf{n} = (0, 2, -1)$. (5p)

   (a) Bestäm $T(0, 2, -1)$ samt $T(1, 0, 0)$.

   (b) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.

   (c) Bestäm $T(6, 4, -2)$.

6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning. (5p)

   (a) Definiera begreppet *linjär avbildning*.

   (b) Visa utifrån definitionen att den nya avbildningen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av $S(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + T(T(\mathbf{v}))$ också är en linjär avbildning.

   (c) Ge exempel på en linjär avbildning där T är inverterbar, men där motsvarande S inte är inverterbar.