MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Per Alexandersson

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 21 augusti 2024

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{5}(3,4)$ och $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{5}(4,-3)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$.
   (a) Visa att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ tillsammans utgör en bas för planet. (1p)
   (b) Bestäm skalärprodukterna $(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_1$ och $(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_2$ där a och b är reella tal. (2p)
   (c) Skriv vektorn $\frac{1}{5}(17,6)$ som en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. (2p)

2. Beräkna determinanten nedan (glöm inte att motivera dina steg): (5p)

$$\begin{vmatrix} 100 & 200 & 200 & 100 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{2}{100} & \frac{2}{100} & \frac{2}{100} & \frac{1}{100} \end{vmatrix}.$$

3. Lös matrisekvationen $AX = B$ där (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm avståndet mellan linjen L: $(10,2,0) + t(1,2,-1)$, $t \in \mathbb{R}$ och planet Π som ges av $\{(x,y,z) : (x,y,z) = (1,2,-1)r + (1,0,1)s,\ r,s \in \mathbb{R}\}$. (5p)

5. Den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av den ortogonala projektionen på vektorn $(1,2,-1)$. (5p)
   (a) Bestäm $T(1,0,1)$ samt $T(4,8,-4)$.
   (b) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (a,b)$ och $\mathbf{u}_2 = (c,d)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som definieras av $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)$. (5p)
   (a) Bestäm $T(2,3)$.
   (b) Visa att T är en linjär avbildning. Utgå ifrån definitionen för linjär avbildning samt egenskaper för skalärprodukt.
   (c) Avgör vilket krav som ska gälla för (a,b) och (c,d) för att T ska vara inverterbar.

Lycka till!