MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
Avd. Matematik	den 21 augusti 2024
Examinator: Per Alexandersson	

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Låt $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{5}(3,4)$ och $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{5}(4,-3)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$.

   (a) Visa att $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ tillsammans utgör en bas för planet. (1p)

   (b) Bestäm skalärprodukterna $(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_1$ och $(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_2$ där a och b är reella tal. (2p)

   (c) Skriv vektorn $\frac{1}{5}(17,6)$ som en linjärkombination av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$. (2p)

   Lösning. (a) Eftersom vektorerna inte är parallella och är två till antalet, så utgör de en bas. Alternativt kan vi ställa upp dem som kolonner i en determinant och se att determinanten är nollskild.

   (b) Vi har att $|\mathbf{f}_1|^2 = |\mathbf{f}_2|^2 = 1$ samt $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ (enkel beräkning). Vi noterar att vektorerna utgör en ON-bas. Detta leder till att

$$(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_1 = a|\mathbf{f}_1|^2 + b\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = a$$
$$(a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2) \cdot \mathbf{f}_2 = a\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 + b|\mathbf{f}_2|^2 = b.$$

   (c) Enligt föregående beräkning har vi att om $\frac{1}{5}(17,6) = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$, så är

$$a = \frac{1}{5}(17,6) \cdot \mathbf{f}_1 = \frac{1}{25}(17 \cdot 3 + 6 \cdot 4) = 3$$
$$b = \frac{1}{5}(17,6) \cdot \mathbf{f}_2 = \frac{1}{25}(17 \cdot 4 + 6 \cdot (-3)) = 2.$$

   Alltså, $\frac{1}{5}(17,6) = 3\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$. Man kan också få fram a och b genom ett linjärt ekvationssystem.

2. Beräkna determinanten nedan (glöm inte att motivera dina steg): (5p)

$$\begin{vmatrix} 100 & 200 & 200 & 100 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{2}{100} & \frac{2}{100} & \frac{2}{100} & \frac{1}{100} \end{vmatrix}.$$

Lycka till!

Lösning. Vi bryter ut 100 ur första raden och 1/100 ur sista raden. Dessa tar ut varandra och determinanen är

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

I andra steget ovan subtraherades första raden från de tre andra. Efter utveckling längs med sista raden, får vi kvar

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Matrisen är övertriangulär, så dess determinant är $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Det slutliga svaret blir då -2.

3. Lös matrisekvationen $AX = B$ där (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Om A är inverterbar, så har vi att $X = A^{-1}B$. Vi börjar med beräkningen för inversen, och hoppas att den existerar. Vi ställer upp och får

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Efter gausselimination får man

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

så inversen till A finns och det återstår att beräkna $A^{-1}B$. Slutligen,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm avståndet mellan linjen L: $(10, 2, 0) + t(1, 2, -1)$, $t \in \mathbb{R}$ och planet Π som ges av $\{(x, y, z) : (x, y, z) = (1, 2, -1)r + (1, 0, 1)s,\ r, s \in \mathbb{R}\}$. (5p)

Lösning. Eftersom riktningsvektorn $(1, 2, -1)$ för linjen finns med som en av planets riktningsvektorer, så är planet och linjen parallella. Planets normal fås av kryssprodukten

$$(1, 2, -1) \times (1, 0, 1) = (2, -2, -2)$$

så planet på normalform är $2x - 2y - 2z = 0$. Detta kan även skrivas som $x - y - z = 0$. Vi vill nu gå från en punkt på linjen längs med riktningen $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$ tills vi hamnar i planet. Dvs. vi söker t så att $(10, 2, 0) + t(1, -1, -1) = (10+t, 2-t, -t)$ uppfyller planets ekvation. Insatt i ekvationen får vi

$$(10 + t) - (2 - t) - (-t) = 0 \iff 3t + 8 = 0 \iff t = -\frac{8}{3}.$$

Detta ger att längden av vektorn $(-8/3)(1, -1, 1)$ är avståndet vi söker. Vi har att

$$\|(-8/3)(1, -1, 1)\| = \frac{8}{3}\|(1, -1, 1)\| = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Alternativt kan man ta en vektor mellan en punkt i planet och en punkt på linjen, och projicera denna på $\mathbf{n}$. Längden av projektionen är precis längden som sökes.

5. Den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av den ortogonala projektionen på vektorn $(1, 2, -1)$. (5p)

(a) Bestäm $T(1, 0, 1)$ samt $T(4, 8, -4)$.

(b) Bestäm avbildningsmatrisen för T med avseende på standardbasen.

Lösning. (a) Eftersom $(1, 0, 1)$ är ortogonal mot $(1, 2, -1)$, så har vi att $T(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Eftersom $(4, 8, -4)$ är parallell med $(1, 2, -1)$, så gäller $T(4, 8, -4) = (4, 8, -4)$.

(b) Projektion av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{v}$ ges av

$$\mathbf{x_v} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v},$$

så

$$T(x, y, z) = \frac{(x, y, z) \cdot (1, 2, -1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2}(1, 2, -1) = \frac{x + 2y - z}{6}(1, 2, -1).$$

Vi kan nu lätt beräkna vad vektorerna i standardbasen avbildas på—dessa vektorer blir kolonnerna i avbildningsmatrisen:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Låt $\mathbf{u}_1 = (a, b)$ och $\mathbf{u}_2 = (c, d)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$. Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som definieras av $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)$. (5p)

   (a) Bestäm $T(2, 3)$.

   (b) Visa att T är en linjär avbildning. Utgå ifrån definitionen för linjär avbildning samt egenskaper för skalärprodukt.

   (c) Avgör vilket krav som ska gälla för (a, b) och (c, d) för att T ska vara inverterbar.

Lösning. (a) Vi har att

$$T(2, 3) = ((2, 3) \cdot (a, b), (2, 3) \cdot (c, d)) = (2a + 3b, 2c + 3d).$$

(b) Först, räkneregler för skalärprodukt ger (för $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$) att

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= ((\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (a, b), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (c, d)) \\ &= (\mathbf{u} \cdot (a, b) + \mathbf{v} \cdot (a, b), \mathbf{u} \cdot (c, d) + \mathbf{v} \cdot (c, d)) \\ &= (\mathbf{u} \cdot (a, b), \mathbf{u} \cdot (c, d)) + (\mathbf{v} \cdot (a, b), \mathbf{v} \cdot (c, d)) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Därefter, för $\lambda \in \mathbb{R}$ har vi att

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{u}) &= ((\lambda \mathbf{u}) \cdot (a, b), (\lambda \mathbf{u}) \cdot (c, d)) \\ &= (\lambda(\mathbf{u} \cdot (a, b)), \lambda(\mathbf{u} \cdot (c, d))) \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{u} \cdot (a, b), \mathbf{u} \cdot (c, d)) \\ &= \lambda \cdot T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Dessa två egenskaper verifierar att T är linjär.

(c) Vi har att $T(1, 0) = (a, c)$ och $T(0, 1) = (b, d)$, så avbildningsmatrisen för T (i standardbasen) ges av

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

För att T ska ha invers, måste avbildningsmatrisen ha invers. Detta gäller precis då dess determinant är nollskild, dvs. då $ad - bc \neq 0$.