MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonas Bergström

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 9 januari 2025

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} x + ay + z &= 1 \\ 2x - z &= 0 \\ ax + y + z &= 1. \end{cases}$$

2. (a) Beräkna inversen till följande matris: (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet $AX = B$ där (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestäm planet (på normalform) som innehåller linjen $\ell : \{(1+t, 1, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$ och punkten $P = (2, -2, 1)$. (3p)

   (b) Bestäm ett plan (på normalform) som är ortogonalt mot linjen $\ell : \{(1+t, 1, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$ och som har avstånd $\sqrt{2}$ från punkten $P = (2, -2, 1)$. (3p)

4. Betrakta följande linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. (6p)

   - S som speglar vektorer i linjen $\ell : \{(t, 0, -t) : t \in \mathbb{R}\}$.
   - P som projicerar vektorer ner på planet $x + 2y + z = 0$.

   Bestäm avbildningsmatriserna för S och P i standardbasen, samt för den sammansatta avbildningen T som först utför S på en vektor och sedan utför P på resultatet.

5. (a) Säg att vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$ utgör en bas och fixera tre godtyckliga vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ i $\mathbb{R}^3$. Visa att det finns en unik linjär avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att $T(\bar{v}_1) = \bar{u}_1$, $T(\bar{v}_2) = \bar{u}_2$ och $T(\bar{v}_3) = \bar{u}_3$. (2p)

   (b) Konstruera en linjär avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att: (4p)

$$T(1,1,2) = (2,0,2) \quad \text{och} \quad T(1,-1,0) = (-1,3,1),$$

   samt sådan att T är inverterbar. (Glöm inte att visa att den linjära avbildningen du konstruerat faktiskt är inverterbar.)