MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonas Bergström

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 9 januari 2025

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} x + ay + z &= 1 \\ 2x - z &= 0 \\ ax + y + z &= 1. \end{cases}$$

Lösning. Vi skriver ekvationssystemet i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & (a+2)/2 & 1 \\ 0 & a & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & (a+2)/2 & 1 \\ 0 & 0 & (a+3)(1-a)/2 & 1-a \end{array}\right).$$

I första steget så multiplicerade vi rad 2 med $1/2$, sedan bytte vi plats på rad 1 och rad 2, och slutligen på rad 2 och rad 3. I andra steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med $-a$ till rad 2 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerad med -1 till rad 3. I tredje steget så adderade vi rad 2 multiplicerad med $-a$ till rad 3.

Vi delar nu upp i tre fall:

- Om $a = -3$, så har vi inga lösningar till ekvationssystemet (för sista ekvationen är då $0 = 4$).
- Om $a = 1$, så får vi matrisen (på reducerad trappstegsform),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  och därmed en fri variabel z som vi sätter lika med parametern $t \in \mathbb{R}$. Lösningarna i detta fall blir då $(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1/2, -3/2, 1)$ för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$.

- Slutligen, om $a \neq 1$ och $a \neq -3$ så får vi genom Gauss-elimination att

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & (a+2)/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a+3}, \end{array}\right)$$

  där vi adderade rad 3 multiplicerad med $1/2$ till rad 1 och sedan adderade rad 3 multiplicerad med $-(a+2)/2$ till rad 2. Alltså så har vi i detta fall en unik lösning $(x, y, z) = (\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{2}{a+3})$.

2. (a) Beräkna inversen till följande matris: (4p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi ställer upp en utvidgad matris och använder oss av Gauss-elimination för att beräkna inversen,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & -6 & -1 \end{array}\right).$$

I första steget så adderade vi rad 1 multiplicerad med 3 till rad 2 och sedan adderade vi rad 1 multiplicerat med -2 till rad 3. I andra steget så adderade vi först -1 multiplicerad med rad 2 till rad 1 sedan adderade vi 6 multiplicerat med rad 2 till rad 3, och därefter så multiplicerade vi rad 2 med -1. I tredje steget så adderade vi -1 multiplicerad med rad 3 till rad 1, och därefter så multiplicerade vi rad 3 med -1.
Från detta följer att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & -7 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -16 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Beräkna alla lösningar till ekvationssystemet $AX = B$ där (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Från uppgift 2 (a) så vet vi att A är inverterbar och alltså har ekvationen unik lösning,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -18 & -7 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -16 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -14 & 12 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & -11 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Bestäm planet (på normalform) som innehåller linjen $\ell : \{(1+t, 1, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$ och punkten $P = (2, -2, 1)$. (3p)

Lösning. Punkten $Q = (1, 1, 1)$ ligger på linjen ℓ med en riktningsvektor $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Därmed kommer vektorn $\overline{QP} = (1, -3, 0)$ ligga i planet och

$$\bar{v} \times \overline{QP} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{e}_1 \\ 0 & -3 & \bar{e}_2 \\ -1 & 0 & \bar{e}_3 \end{vmatrix} = (-3, -1, -3)$$

är en normal. Detta säger oss att planet, på normalform, blir $-3x - y - 3z + D = 0$ för något $D \in \mathbb{R}$. Genom att använda att P ligger på planet så får vi att $-6 + 2 - 3 + D = 0$ och planets ekvation blir alltså $-3x - y - 3z + 7 = 0$.

(b) Bestäm ett plan (på normalform) som är ortogonalt mot linjen $\ell : \{(1 + t, 1, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}$ och som har avstånd $\sqrt{2}$ från punkten $P = (2, -2, 1)$. (3p)

Lösning. Eftersom planet är ortogonalt mot ℓ så är en riktningsvektor $\bar{v} = (1, 0, -1)$ till linjen ℓ också en normalvektor till planet. Planet kan då skrivas på normalform som $x - z + D = 0$ för något $D \in \mathbb{R}$.

Linjen, genom den punkt Q på planet som ligger närmast P, kommer vara ortogonal mot planet. Så vektorn $\overline{PQ}$ kommer vara parallell med $\bar{v}$ och av längd $\sqrt{2}$. Alltså är antingen

$$Q = P + \overline{PQ} = P + \sqrt{2}\frac{\bar{v}}{||\bar{v}||} = (2, -2, 1) + \sqrt{2}\frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} = (3, -2, 0)$$

eller

$$Q = P + \overline{PQ} = P - \sqrt{2}\frac{\bar{v}}{||\bar{v}||} = (2, -2, 1) - \sqrt{2}\frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} = (1, -2, 2).$$

Genom att använda att Q ligger på planet så får vi att $3 + D = 0$ (eller $-1 + D = 0$) och planets ekvation blir alltså $x - z - 3 = 0$ (eller $x - z + 1 = 0$).

4. Betrakta följande linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. (6p)

- S som speglar vektorer i linjen $\ell : \{(t, 0, -t) : t \in \mathbb{R}\}$.
- P som projicerar vektorer ner på planet $x + 2y + z = 0$.

Bestäm avbildningsmatriserna för S och P i standardbasen, samt för den sammansatta avbildningen T som först utför S på en vektor och sedan utför P på resultatet.

Lösning. En riktningsvektor till linjen ℓ är $\bar{v} = (1, 0, -1)$ och vi har då att

$$\begin{aligned} S((x,y,z)) = 2\text{proj}_{\bar{v}}((x,y,z)) - (x,y,z) = 2\frac{(x-z)}{2}(1,0,-1) - (x,y,z) = \\ = (x-z, 0, z-x) - (x,y,z) = (-z,-y,-x) \end{aligned}$$

för en godtycklig vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alltså blir avbildningsmatrisen A_S till S i standardbasen:

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En normalvektor till planet är $\bar{u} = (1, 2, 1)$ och vi har då att

$$\begin{aligned} P((x,y,z)) = (x,y,z) - \text{proj}_{\bar{u}}((x,y,z) = (x,y,z) - \frac{(x+2y+z)}{6}(1,2,1) = \\ = \frac{1}{6}(5x - 2y - z, -2x + 2y - 2z, -x - 2y + 5z) \end{aligned}$$

för en godtycklig vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alltså blir avbildningsmatrisen A_P till P i standardbasen:

$$A_P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Slutligen så blir avbildningsmatrisen A_T till T i standardbasen:

$$A_P \cdot A_S = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Säg att vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$ utgör en bas och fixera tre godtyckliga vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ i $\mathbb{R}^3$. Visa att det finns en unik linjär avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att $T(\bar{v}_1) = \bar{u}_1$, $T(\bar{v}_2) = \bar{u}_2$ och $T(\bar{v}_3) = \bar{u}_3$. (2p)

Lösning. Till en godtycklig vektor $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ så finns unika tal $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sådana att $\bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3\bar{v}_3$, eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$ utgör en bas. En avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ är linjär precis om

$$T(\bar{v}) = T(\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3\bar{v}_3) = \lambda_1 T(\bar{v}_1) + \lambda_2 T(\bar{v}_2) + \lambda_3 T(\bar{v}_3)$$

gäller för varje vektor $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^3$. Om T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ ska vara en linjär avbildning sådan att $T(\bar{v}_1) = \bar{u}_1$, $T(\bar{v}_2) = \bar{u}_2$ och $T(\bar{v}_3) = \bar{u}_3$ så ser vi nu att det finns precis en möjlighet, nämligen att definiera T genom att sätta $T(\bar{v}) = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3$, för varje vektor $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^3$.

(b) Konstruera en linjär avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att: (4p)

$$T(1,1,2) = (2,0,2) \quad \text{och} \quad T(1,-1,0) = (-1,3,1),$$

samt sådan att T är inverterbar. (Glöm inte att visa att den linjära avbildningen du konstruerat faktiskt är inverterbar.)

Lösning. Sätt $\bar{v}_1 = (1,1,2)$, $\bar{v}_2 = (1,-1,0)$ och $\bar{v}_3 = (0,0,1)$. Ekvationen

$$(0,0,0) = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3\bar{v}_3 = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3)$$

ger att

$$0 + 0 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) = 2\lambda_1$$
$$0 - 0 = (\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) = 2\lambda_2$$
$$0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_3$$

så vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ är linjärt oberoende, och utgör därför en bas V för $\mathbb{R}^3$.

Vi ser att $(2,0,2) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$ och att $(-1,3,1) = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3$. Vi definierar nu den (unika från uppgift 6 (a)) linjära avbildningen T sådan att $T(\bar{v}_1) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$, $T(\bar{v}_2) = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3$ och $T(\bar{v}_3) = \bar{v}_3$. Avbildningsmatrisen A till T i basen V blir då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har att $\det(A) = -3 \neq 0$ och alltså är A inverterbar. Det följer då att T är inverterbar.