MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonas Bergström

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 15 februari 2025

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} x + ay + z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ x + az &= 1. \end{cases}$$

Obs: Man ska för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$ bestämma alla lösningar, inte bara räkna ut hur många de är.

2. Låt $\bar{v}_1 = (1, 3, 1)$ och $\bar{v}_2 = (1, -1, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$.
   - (a) Visa att $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är linjärt oberoende. (1p)
   - (b) Beräkna en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$. (1p)
   - (c) Hitta reella tal a, b sådana att $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = (2, 0, 1)$, eller visa att det inte är möjligt. (2p)
   - (d) Hitta reella tal c, d sådana att $c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = (-1, 3, -1)$, eller visa att det inte är möjligt. (2p)

3. Låt två linjer i $\mathbb{R}^3$ definieras genom $\ell_1 = \{(1, 0, 2) + (s, 0, -s) : s \in \mathbb{R}\}$ och $\ell_2 = \{(-1, 0, 1) + (3t, t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$. Beräkna minsta avståndet mellan linjerna, och hitta de två punkter på linjerna som ligger närmast varandra. (6p)

4. Betrakta följande linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. (6p)
   - S som speglar vektorer i planet $x + y = 0$.
   - P som projicerar vektorer ner på linjen $\{(t, 0, -t) : t \in \mathbb{R}\}$.

   Bestäm avbildningsmatriserna för S och P i standardbasen, samt för den sammansatta avbildningen T som först utför S på en vektor och sedan utför P på resultatet.

Var god vänd!

5. (a) Låt λ vara ett reellt tal och definiera den linjära avbildningen T, från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, genom $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ för alla $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^2$. Visa att avbildningsmatrisen till T är densamma oberoende av bas. (3p)

   (b) Antag att T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, vars avbildningsmatris är densamma oberoende av bas. Visa att det då finns ett reellt tal λ sådant att $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ för alla $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^2$. *Tips: Börja med avbildningsmatrisen till T i en bas, och experimentera sedan med enkla konkreta basbyten.* (3p)