MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Jonas Bergström

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, Matematik I, 5 hp
den 15 februari 2025

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. 15 poäng ger minst E. Eventuella bonuspoäng räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara angivna i standardbasen om inget annat anges.

1. Bestäm, för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$, alla lösningar till ekvationssystemet: (6p)

$$\begin{cases} x + ay + z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ x + az &= 1. \end{cases}$$

Obs: Man ska för varje reellt tal $a \in \mathbb{R}$ bestämma alla lösningar, inte bara räkna ut hur många de är.

Lösning. Vi skriver ekvationssystemet i en utvidgad matris och använder Gauss-elimination,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1-a & -1 \\ 0 & -1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1-a^2 & a-1 \\ 0 & -1 & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & (1+a)(1-a) & a-1 \end{array}\right).$$

I första steget så adderade vi rad 3 multiplicerad med -1 till rad 1 och sedan adderade vi rad 3 multiplicerad med -1 till rad 2. I andra steget så adderade vi rad 2 multiplicerad med a till rad 1. I tredje steget så multiplicerade vi rad 2 med -1, sedan bytte vi plats på rad 1 och rad 3.

Vi delar nu upp i tre fall:

- Om $a = -1$, så har vi inga lösningar till ekvationssystemet (för sista ekvationen är då $0 = -2$).
- Om $a = 1$, så får vi matrisen (på reducerad trappstegsform),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  och därmed en fri variabel z som vi sätter lika med parametern $t \in \mathbb{R}$. Lösningarna i detta fall blir då $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$ för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$.

- Slutligen, om $a \neq 1$ och $a \neq -1$ så får vi genom Gauss-elimination att

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+1} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a+1}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+1}, \end{array}\right)$$

där vi i första steget multiplicerade rad 3 med $\frac{1}{(1+a)(1-a)}$. I andra steget så adderade vi rad 3 multiplicerad med $-(a-1)$ till rad 2 och så adderade vi rad 3 multiplicerad med $-a$ till rad 1. Alltså så har vi i detta fall en unik lösning $(x, y, z) = (\frac{2a+1}{a+1}, -\frac{2}{a+1}, -\frac{1}{a+1})$.

2. Låt $\bar{v}_1 = (1, 3, 1)$ och $\bar{v}_2 = (1, -1, 1)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$.

   (a) Visa att $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är linjärt oberoende. (1p)

   Lösning. Betrakta ekvationen $\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$, där λ_1, λ_2 är variabler. Detta ger att $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ och $3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Den förstnämnda ekvationen ger att $\lambda_2 = -\lambda_1$ vilket insatt i den andra ekvationen ger att $4\lambda_1 = 0$. Alltså är $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, vilket visar att $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ är linjärt oberoende.

   (b) Beräkna en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$. (1p)

   Lösning. Kryssprodukten till $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ och

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}) = (4, 0, -4).$$

   (c) Hitta reella tal a, b sådana att $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = (2, 0, 1)$, eller visa att det inte är möjligt. (2p)

   Lösning. Ekvationen $a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 = (a+b, 3a-b, a+b) = (2, 0, 1)$ ger direkt att $a + b = 2$ och $a + b = 1$. Dessa två ekvationer kan inte samtidigt vara sanna, så det är inte möjligt att hitta en lösning till ekvationen.

   (d) Hitta reella tal c, d sådana att $c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = (-1, 3, -1)$, eller visa att det inte är möjligt. (2p)

   Lösning. Ekvationen $c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = (c + d, 3c - d, c + d) = (-1, 3, -1)$ är ekvivalent med att $c + d = -1$ och $3c - d = 3$. Den förstnämnda ekvationen ger att $d = -1 - c$ vilket insatt i den andra ekvationen ger att $4c = 2$. Alltså ger $c = 1/2$ och $d = -3/2$ den unika lösningen till ekvationen.

3. Låt två linjer i $\mathbb{R}^3$ definieras genom $\ell_1 = \{(1,0,2) + (s,0,-s) : s \in \mathbb{R}\}$ och $\ell_2 = \{(-1,0,1) + (3t,t,-2t) : t \in \mathbb{R}\}$. Beräkna minsta avståndet mellan linjerna, och hitta de två punkter på linjerna som ligger närmast varandra. (6p)

Lösning. Låt $P_1 = (1+s', 0, 2-s')$ på ℓ_1 och $P_2 = (-1+3t', t', 1-2t')$ på ℓ_2 vara punkterna som ligger närmast varandra. Då vet vi att $\overline{P_2P_1} = (2+s'-3t', -t', 1-s'+2t')$ är ortogonal mot riktningsvektorn $\bar{v}_1 = (1,0,-1)$ till ℓ_1 och riktningsvektorn $\bar{v}_2 = (3,1,-2)$ till ℓ_2. Alltså, $\overline{P_2P_1} \cdot \bar{v}_1 = 1+2s'-5t' = 0$ och $\overline{P_2P_1} \cdot \bar{v}_2 = 4+5s'-14t' = 0$. Löser vi detta ekvationssystem så får vi den unika lösningen $s' = 2$ och $t' = 1$. Detta ger att $P_1 = (3,0,0)$ och $P_2 = (2,1,-1)$ samt att avståndet dem emellan är $|\overline{P_2P_1}| = |(1,-1,1)| = \sqrt{3}$.

4. Betrakta följande linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$. (6p)

- S som speglar vektorer i planet $x + y = 0$.
- P som projicerar vektorer ner på linjen $\{(t, 0, -t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Bestäm avbildningsmatriserna för S och P i standardbasen, samt för den sammansatta avbildningen T som först utför S på en vektor och sedan utför P på resultatet.

Lösning. En normalvektor till planet $x + y = 0$ är $\bar{v} = (1,1,0)$ och vi har då att

$$\begin{aligned} S((x,y,z)) &= (x,y,z) - 2\operatorname{proj}_{\bar{v}}((x,y,z)) = (x,y,z) - 2\frac{(x+y)}{2}(1,1,0) = \\ &= (x,y,z) - (x+y, x+y, 0) = (-y,-x,z) \end{aligned}$$

för en godtycklig vektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alltså blir avbildningsmatrisen A_S till S i standardbasen:

$$A_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En riktningsvektor till linjen är $\bar{u} = (1,0,-1)$ och vi har då att

$$P((x,y,z)) = \operatorname{proj}_{\bar{u}}((x,y,z)) = \frac{(x-z)}{2}(1,0,-1) = \ = \frac{1}{2}(x-z, 0, z-x)$$

för en godtycklig vektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alltså blir avbildningsmatrisen A_P till P i standardbasen:

$$A_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slutligen så blir avbildningsmatrisen A_T till T i standardbasen:

$$A_P \cdot A_S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Låt λ vara ett reellt tal och definiera den linjära avbildningen T, från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, genom $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ för alla $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^2$. Visa att avbildningsmatrisen till T är densamma oberoende av bas. (3p)

   Lösning. Tag en godtycklig bas $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ för $\mathbb{R}^2$. Då är enligt definitionen $T\bar{v}_1 = \lambda\bar{v}_1$ och $T\bar{v}_2 = \lambda\bar{v}_2$. Alltså är avbildningsmatrisen för T i basen $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ lika med $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Resultatet följer eftersom basen var godtycklig.

   (b) Antag att T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$, vars avbildningsmatris är densamma oberoende av bas. Visa att det då finns ett reellt tal λ sådant att $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ för alla $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^2$. *Tips: Börja med avbildningsmatrisen till T i en bas, och experimentera sedan med enkla konkreta basbyten.* (3p)

   Lösning. Tag en godtycklig bas $V : \bar{v}_1, \bar{v}_2$ för $\mathbb{R}^2$. Avbildningsmatrisen A_V för T i basen V är då lika med $A_V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ för några reella tal a, b, c, d. Låt $\bar{w}_1 = \bar{v}_1, \bar{w}_2 = -\bar{v}_2$. Då är $W : \bar{w}_1, \bar{w}_2$ en bas och basbytesmatrisen från basen W till basen V är lika med $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och avbildningsmatrisen A_W för T i basen W är lika med $B^{-1}A_VB = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. Eftersom avbildningsmatrisen är densamma oberoende av bas så följer att $A_V = A_W$ och alltså måste $b = c = 0$. Låt nu $\bar{u}_1 = \bar{v}_2, \bar{u}_2 = \bar{v}_1$. Då är $U : \bar{u}_1, \bar{u}_2$ en bas och basbytesmatrisen från basen U till basen V är lika med $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och avbildningsmatrisen A_U för T i basen U är lika med $C^{-1}A_VC = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Eftersom $A_V = A_U$ så måste $a = d$, och $A_V = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Eftersom $[T(\bar{v})]_V = A_V[\bar{v}]_V = a[\bar{v}]_V$ för godtycklig vektor $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^2$, så är $T(\bar{v}) = a\bar{v}$.